a) Kipróbálhatnánk az adott jegyekből képezhető mindegyik számot, hogy négyzetszám-e, azonban közülük igen sokat kipróbálás nélkül kizárhatunk.

Tudjuk, hogy négyzetszám csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 jegyre végződhet, hiszen szorzat utolsó jegyét a tényezők utolsó jegyének a szorzata határozza meg, négyzetszám utolsó jegyét tehát az alap utolsó jegye: a 0, 1, 2, ..., 9 számok négyzetének utolsó jegye pedig a felsorolt számjegyek valamelyike. Ezek közül esetünkben csak a 0 és 1 jön tekintetbe. 0 csak 0-ra végződő szám négyzete végén állhat és ilyen végén mindig páros számú 0 áll. Esetünkben ez a szám csak kettő lehet, tehát csak a 00-ra végződő, „kerek" négyzetszámok jönnek tekintetbe.

Ha az utolsó jegy 1, akkor a szám páratlan szám négyzete. Az ilyen 4-gyel, sőt 8-cal osztva is 1-et ad maradékul. Valóban, ha az alap $2k+1$ alakú, akkor négyzete

$$4k(k+1)+1,$$

és itt k és $k+1$ közül valamelyik páros, amivel igazoltuk állításunkat.

Tudjuk, hogy egy szám 4-gyel való osztási maradéka az utolsó két jegyből alkotott szám maradékával egyezik meg, a 8-cal való osztás maradéka pedig az utolsó három jegyből alkotott szám maradékával. Így kiesnek a 11-re végződő számok, mert 4-gyel osztva 3-at adnak maradékul, a 3 utolsó jegyet nézve pedig a 101-re, 021-re és 221-re végződő számok, mert ezek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul. Így 3-jegyű végződésként a 001, 201 és 121 jön csak tekintetbe.

Visszatérve a 00 végű számokra, azokból az utolsó két jegy elhagyásával is négyzetszám marad, ezek tehát a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2 jegyekből alkotott négyzetszámokból keletkeznek két 0-nak a végére írásával, amit úgy is mondhatunk, hogy a keresett négyzetszámok közül a legalább két 0-val kezdődőkből az első két 0 végére írásával.

A továbbiakban sem a végződésük alapján szóba jövő számokból próbáljunk négyzetgyököt vonni, hanem további szempontokból is megnézzük, melyek azok a számok, amelyeknek a négyzetei szóba jöhetnek, és hogy ezek négyzetei a megfelelő alakúak-e.

A szóba jövő alapokról megállapíthatjuk, hogy oszthatóknak kell lenniük 3-mal, mert a megadott jegyek összege 9, s így minden belőlük alkotott szám osztható 9-cel, ez pedig csak 3-mal osztható számok négyzetére teljesül.

A négyzet utolsó három jegyéből megállapíthatjuk az alap utolsó három jegyére szóba jövő számcsoportokat is. Ha ugyanis c és x négyzetének utolsó három jegye megegyezik, akkor négyzeteik különbsége:

$$x^2-c^2=(x-c)(x+c), \tag{1}$$

osztható 1000-rel. Mivel a két tényező egyszerre páros vagy páratlan, így esetünkben mindkettőnek párosnak kell lennie. Másrészt a szorzatnak oszthatónak kell lennie 125-tel. Esetünkben nem lehet mindkét tényező osztható 5-tel, ugyanis a 001, 121, 201 végződések esetén c rendre $1(=001)$, $11(=011)$, ill. 101-nek választható. Az (1) jobb oldalán álló két tényező különbsége, $2c$, egyik esetben sem osztható 5-tel, így valóban nem lehet mindkét tényező osztható 5-tel. A szorzat tehát csak úgy lehet 125-tel osztható, ha az 5-tel osztható tényező 125-tel is osztható. Mivel még mindkét tényező páros is, tehát vagy $x-c$, vagy $x+c$ alakja $250k$, tehát

$$x=250k\pm c.$$

Ez a négyzet 001, 121, 201 végződése esetén (ha k-nak az 1, 2, 3, 4 értékeket adjuk és c-nek a fenti 1, 11, 101 számokat választjuk) a következő nyolc-nyolc lehetséges végződést adja az alapra:

$$\begin{array}{cccccccc}
249, & 251, & 499, & 501, & 749, & 751, & 999, & 001;\\
239, & 261, & 489, & 511, & 739, & 761, & 989, & 011;\\
149, & 351, & 399, & 601, & 649, & 851, & 899, & 101.
\end{array} \tag{2}$$

Végül még az első néhány jegy lehetséges értékeit is tekintetbe véve, korlátokat állapíthatunk meg az alapra. A 000 jegyekkel kezdődő számokra a megadott jegyekből csak a 121 végződés lehetséges, így a kérdéses négyzetszám 000 122 121, vagy 000 212 121 vagy 000 221 121 lehet. Ezek négyzetgyöke csak 300-nál nagyobb és 500-nál kisebb háromjegyű szám lehet, tehát csak 489 lehetne, de ennek a négyzete nem felel meg.

A 001-gyel és 002-vel kezdődő számok négyzete 121-re vagy 201-re végződhet, így az

(1 022 121, 1 221 201), ill. (2 012 121, 2 211 201) számközbe kell esnie, ha az adott számjegyekkel írható. Az alap tehát, durván számolva, az

$$(1000,\quad 1110),\qquad \text{ill.}\qquad (1400,\quad 1500)$$

számközbe eshet csak. A megengedett végződéseket tekintetbe véve, az elsőből az 1011 és 1101 jön tekintetbe, a másodikból 1489. Az utolsó nem osztható 3-mal, az első kettő megfelel:

$$1011^2=001\,022\,121,\quad 1101^2=001\,212\,201,$$

ezért a fentiek szerint megfelel a következő kettő is:

$$10\,110^2=102\,212\,100,\quad 11\,010^2=121\,220\,100.$$

Ezzel, előrebocsátott megjegyzésünk szerint az összes szóba jövő, 00-ra végződő négyzetszámot meg is kaptuk, hiszen a lehetséges, 00-val kezdődőket már számba vettük.

A további számokra a lehetséges kezdő jegycsoport szerint osztályozva és a lehetséges végső jegyeket is figyelembe véve, a következő számközök adódnak:

N^2			N	
kezdő jegyei	korlátai		korlátai (tágítva)	
010	010 022 121	010 221 201	3 160,	3 200
011	011 022 201	011 222 001	3 310,	3 350
012	012 002 121	012 221 001	3 460,	3 500
02	020 012 121	022 211 001	4 470,	4 720
10	100 022 121	102 221 001	10 000,	10 120
11	110 022 201	112 220 001	10 400,	10 600
12	120 002 121	122 210 001	10 900,	11 100
20	200 012 121	202 211 001	14 140,	14 220
21	210 002 121	212 210 001	14 400,	14 600
22	220 001 121	222 110 001	14 800,	14 910

Az N-re adódó számközökbe eső és a (2) táblázatban adott jegyekkel végződő számok az első két intervallumnál nincsenek, a többieknél sorra a következők:

$$\underline{3489}, 3499; 4489, 4499, 4501, 4511, 4601, 4649; 10\,001, \underline{10\,011}, \underline{10\,101}; 10\,489,$$
$$10\,499, 10\,501, 10\,511; \underline{10\,989}, 10\,999, \underline{11\,001}, 11\,011; 14\,149; 14\,489, \underline{14\,499},$$
$$14\,501, \underline{14\,511}; 14\,851, 14\,899.$$

Közülük csak az aláhúzottak oszthatók 3-mal. Ezeket négyzetre emelve a következő megfelelő számokat kapjuk:

$$10\,011^2 = 100\,220\,121, \qquad 11\,001^2 = 121\,022\,001 \quad \text{és}$$
$$14\,499^2 = 210\,221\,001.$$

A korábban talált 4 számmal együtt tehát 7 kívánt alakú négyzetszám adódott.

b) Mindjárt látjuk, hogy a talált négyzetszámok közül 6 olyan párokba rendezhető, melyekben a jegyek sorrendje fordított, és ugyanez áll a megfelelő alapokra is, ha az első kettőt az értelemszerűen megengedett 01 011, ill. 01 101 alakban írjuk.

Ugyanez a 6 négyzetre emelés bármely B (≥ 3) alapú számrendszerben érvényes, ugyanis pl. a $100\,220\,121 = 10\,011^2$ megoldás a

$$B^8 + 2B^5 + 2B^4 + B^2 + 2B + 1 = (B^4 + B + 1)^2$$

azonosságnak csupán más alakja.

Az utoljára talált megoldás miatt a feladat mindkét kérdésére a válasz nemleges, ugyanis abban a megfordított számjegysor végén 2 áll, másrészt

$$2B^8 + B^7 + 2B^5 + 2B^4 + B^3 + 1 = (B^4 + 4B^3 + 4B^2 + 9B + 9)^2 \tag{3}$$

nem azonosság. Úgy is fogalmazhatjuk, hogy az első hat négyzetre emelésnél nem kerül sor tízes átvitelre, s így azok nem függenek az alapszámtól – mindaddig, míg az nagyobb az egyes részletszorzatoknál, amik esetünkben 0, 1 vagy 2 értékűek. Az utolsó négyzetre emelésben viszont fellép tízes átvitel és ez más-más alapszám esetén másképp alakul.

Bajmóczy Ervin, Perény Gábor és Pintz János dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. A talált utolsó megoldás semmilyen más számrendszerben nem érvényes. Ugyanis (3)-ban a 0-ra redukálás, valamint a $B = 10$ gyökhöz tartozó $B - 10$ gyöktényezővel való osztás után a hányados-polinom minden együtthatója pozitív, tehát minden $B > 0$ számra pozitív az értéke.