I. megoldás. Ha létezik megfelelő a, b számpár, akkor az $a/b=r$ hányados is racionális szám. (Nem lehet $b=0$, mert így (1) nem teljesülne, hiszen bal oldala csak 2 lehetne.) $a=br$ helyettesítéssel (1) így alakul:

$$\frac{r+1}{r}+\frac{r}{r+1}=b.$$

És innét azonnal látjuk, hogy $r=0$ és $r=-1$ kivételével minden racionális szám megad egy megfelelő b, a számpárt:

$$b=\frac{r+1}{r}+\frac{r}{r+1},\qquad a=r+1+\frac{r^2}{r+1}.$$

Pintz János (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A fenti megoldásnál valamivel még egyszerűbb a következő. A bal oldal két tagja racionális szám és egymás reciproka (így egyik sem lehet 0). Pl. az elsőt r'-vel jelölve

$$b=r'+\frac{1}{r'},\quad \text{ahol}\quad \frac{a+b}{a}=r',\ \text{így} \tag{2}$$

$$a=\frac{1}{r'-1}\cdot b=\frac{1}{r'-1}\left(r'+\frac{1}{r'}\right),\ \text{ha } r'\neq 1. \tag{3}$$

Ha r' a 0-tól és 1-től különböző racionális szám, akkor (2) és (3) racionális b-t és a-t ad. (Az is látható, hogy megkaptuk az összes racionális megoldást.)

II. megoldás. A törteket eltávolítva és a szerint rendezve (1) így alakul:

$$(2-b)a^2+b(2-b)a+b^2=0. \tag{4}$$

b számára csak olyan érték használható, amelyre a diszkrimináns r_1 négyzetgyöke racionális szám:

$$D=b^2(2-b)^2-4(2-b)b^2=b^2(b^2-4)=r_1^2,$$

azaz

$$b^2-4=r_2^2,$$
$$b^2=r_2^2+4, \tag{5}$$

ahol r_2 ugyancsak racionális szám.

Egész számokban keresve megoldást, csak $r_2=0$, $b^2=4$, $b=\pm2$ jön szóba. Azonban $b=2$ a (4)-gyel ellentmondásra vezet; $b=-2$ esetén $a=1$ az egyetlen gyök, így az a, $b=1$, -2 számpár megoldás, és máris kimondhatjuk, hogy a kérdésre a válasz igenlő.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Általában a racionális b-t és r_2-t B/N, ill. R/N alakban keresve, ahol B, R, N egész számok, (5) a következőbe megy át:

$$R^2+(2N)^2=B^2.$$

Eszerint minden pitagoraszi számhármas szolgáltat egy-egy racionális megoldást:

$$b=\frac{u^2+v^2}{uv},\ \left(r_2=\frac{u^2-v^2}{uv}\right),\ a=\ldots=\frac{u^2+v^2}{v(v-u)},$$

ahol u, v egymástól és 0-tól különböző egész számok.

Takács László

2. Egyetlen a, b számpárt azonban könnyebben kaptunk volna (4)-nek b szerinti rendezéséből kiindulva:

$$(1-a)b^2+a(2-a)b+2a^2=0,$$

ugyanis ez az egyenlet $a=1$ esetén elsőfokúvá egyszerűsödik, és így megoldása racionális: $b=-2$.