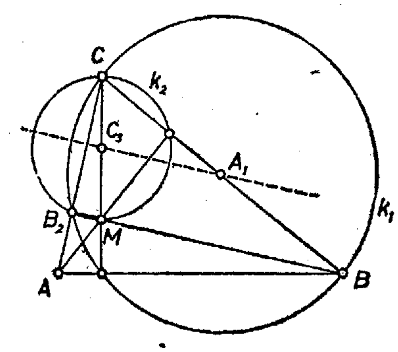
I. megoldás. Legyen az ABC háromszög magasságpontja M. B_2 a BCB_2 és MCB_2 háromszögek közös derékszögének csúcsa, így rajta van a BC és MC átfogó fölé írt k_1 ill. k_2 Thalész-körön (1. ábra).



1. ábra

E két kör középpontja rendre az adott A_1, ill. C_3 pont, így ismert B_2 pontjuk alapján megrajzolhatók, és B_2-től különböző közös pontjuk C, ennek átellenes pontja k_1-ben B, k_2-ben M. Mivel $CA \perp BM$ és $BA \perp CM$, a keresett háromszög hátra levő A csúcsa a már meghatározott BCM háromszög magasságpontja lesz.

Ha az adott A_1, B_2, C_3 pontok különbözők, k_1 és k_2 mindig megrajzolhatók. Ahhoz azonban, hogy legyen B_2-től különböző közös pontjuk, az adott pontok nem eshetnek egy egyenesbe, hiszen különben B_2-ben érintenék egymást. Ha C és B_2 különböző pontok, akkor egymás képei a körök A_1C_3 centrálisára nézve, valódi háromszöget alkotnak A_1-gyel és C_3-mal, ezért valódi háromszög lesz CA_1C_3-nak C-ből kétszeresére nagyított képe, a CBM háromszög is. A CBM háromszög A magasságpontja nem azonos a B, C csúcsokkal, ha sem a $CBM\sphericalangle$, sem a $BCM\sphericalangle$ nem derékszög. Ebben az esetben $AC \perp BM$, $AB \perp CM$ miatt M magasságpontja az ABC háromszögnek és A_1, C_3 valóban a CB, CM szakaszok felezőpontja. Mivel az $MBC\sphericalangle$ nem derékszög, C-t az A_1-re, valamint az A_1C_3 egyenesre tükrözve különböző pontokba jutunk, tehát B_2 nem azonos B-vel, sem C-vel, így B_2-ből az AC szakasz 90° alatt látszik, B_2 tehát valóban az ABC háromszög B csúcsához tartozó magasságának a talppontja. Ezek szerint az ABC háromszög eleget tesz a követelményeknek.

II. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor a szerkesztés nem végezhető el. Ha az A_1, B_2, C_3 pontok különbözők, de egy egyenesbe esnek, akkor C azonosnak adódik B_2-vel, tehát a keresett ABC háromszögnek C-nél 90°-os szöge volna, hiszen $CA \perp BM \parallel A_1C_3$ miatt mindig $CA \perp A_1C_3$. Ámde ekkor az M magasságpont és az MC szakasz C_3 felezőpontja is azonos volna C-vel, tehát B_2 és C_3 nem lehetne különböző, ami ellentmondás. Ebben az esetben tehát nincs megoldása a feladatnak.

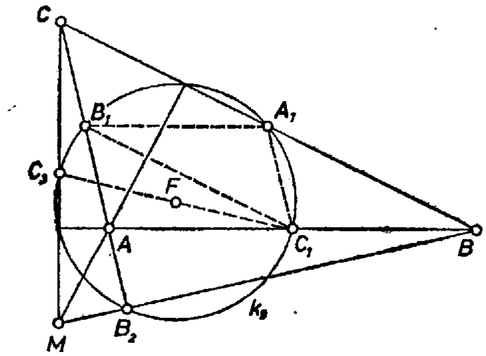
Ha az A_1, B_2, C_3 pontok nem esnek egy egyenesbe, akkor a szerkeszthetőség feltétele – mint láttuk – az, hogy a BCM háromszögben se a B, se a C csúcsban ne adódjék derékszög. Mivel a BCM háromszöget úgy kapjuk, hogy az $A_1B_2C_3$ háromszöget az A_1C_3 oldalra tükrözzük, majd az így kapott A_1CC_3 háromszöget a C csúcsból kétszeresére nagyítjuk, a szerkeszthetőség feltétele az, hogy az A_1, B_2, C_3 pontok által meghatározott (valódi) háromszögben se az A_1, se a B_2 csúcsnál ne legyen derékszög.

Tekintsük még azokat az eseteket, amikor az adott pontok közül kettő azonos. Mivel a BC oldal A_1 felezőpontja nem lehet az AC oldal egyenesén, A_1 és B_2 nem lehet azonos. B_2 és C_3 csak úgy lehet azonos, ha M és C is azonos velük, vagyis az ABC háromszögben C-nél derékszög van. Ekkor viszont az adatok csak a BC oldalt határozzák meg, az A csúcs a BC-re a C pontban emelt merőleges tetszőleges pontja lehet. Ha végül A_1 és C_3 azonos, akkor M azonos B-vel, és a feladatnak ismét végtelen sok megoldása van.

Tabiczky István (Győr, Révai M. gimn. III. o. t.)
Takács László (Sopron, Széchenyi I. gimn. III. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Az adott pontok mindegyike rajta van a keresett háromszög k_9 Feuerbach-féle körén, ennélfogva k_9 megszerkeszthető, legyen a középpontja F. És mivel egy oldalszakasz felezőpontja és a rá merőleges magasságvonalon a csúcs és magasságpont közti szakasz felezőpontja k_9 egy átmérőjének végpontjait adják, azért C_3-nak F-re vett tükörképe C_1, az AB oldal felezőpontja. Ekkor az A_1C_1 egyenes megadja az AC oldal irányát, ezért a B_2-n átmenő, A_1C_1-gyel párhuzamos egyenes k_9-ből kimetszi B_1-et, az AC oldal felezőpontját, ekkor pedig hasonlóan az AB oldalegyenes átmegy C_1-en és párhuzamos A_1B_1-gyel, BC pedig átmegy A_1-en és párhuzamos B_1C_1-gyel.

Ekkor a k_9 kör, mint az A_1, B_1, C_1 pontokon átmenő kör, a szerkesztett háromszög Feuerbach-köre, ennek az AC oldallal való másik metszéspontja B_2, a magasság talppontja, C_1-gyel átellenes C_3 pontja pedig CM felezőpontja, tehát az ABC háromszög megfelel a követelményeknek (2. ábra).



2. ábra

Farkas György (Budapest, Landler J. techn. II. o. t.)