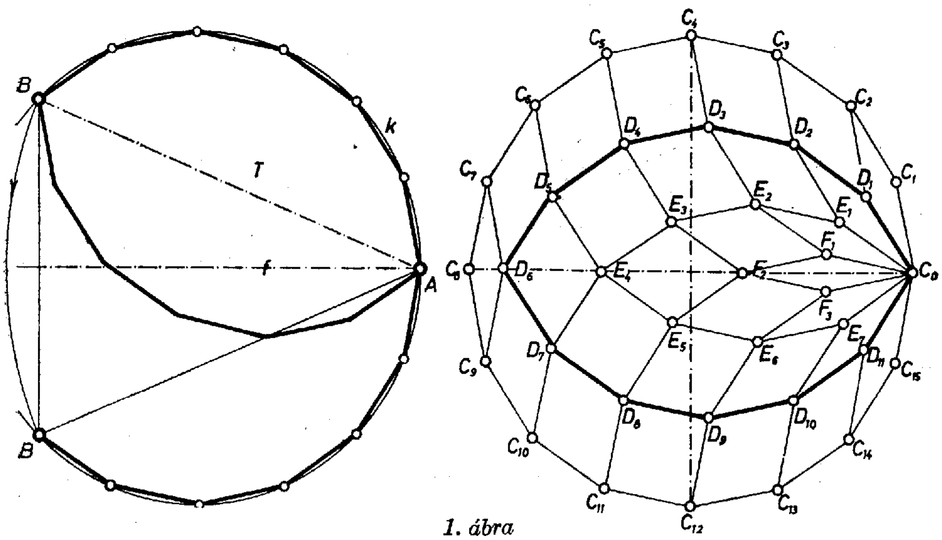
$$(1) \qquad t = 5\sin\alpha + 4\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + 2\sin 4\alpha + \sin 5\alpha.$$

I. Megmutatjuk, hogy a vizsgálandó T tizenkétszög szimmetrikus a két kivételes csúcsot, A-t és B-t összekötő átlójára. A és B két törött vonalra bontja T kerületét. Forgassuk el az egyiket A körül úgy, hogy a két törött vonal A-ban csatlakozó szakaszai közti szög is egyenlő legyen a szabályos 16-szög szögével, és legyen az elfordított törött vonal szabad végpontja B'.



1. ábra

Ekkor a BAB' törött vonal úgy származtatható egy egységnyi oldalú S szabályos 16-szög kerületéből, hogy annak 4 egymás utáni oldalát a BB' átlóval levágjuk. A forgatás miatt $B'A = BA$, ezért A rajta van a BB' átló f felező merőlegesén. BB' az S köré írt k körnek húrja, ezért f a k-nak átmérője, és S-nek szimmetriatengelye, így az AB, AB' törött vonalak egymás képei f-re, tehát mindkét törött vonal ugyanannyi, azaz 6 oldalt tartalmaz T kerületéből. (Az 1. ábra alsó B pontja helyesen B'.)

II. Legyenek egy egységnyi oldalú S szabályos 16-szög egymás utáni csúcsai C_0, C_1, $\cdots$, C_{15} (az előbbi jelölésekkel pl. $C_0 = A$, $C_6 = B$, $C_{10} = B'$). Toljuk el a $C_1C_2 \ldots C_7$ törött vonalat a $\overrightarrow{C_1C_0}$ vektorral a $C_0D_1 \ldots D_6$ helyzetbe. Így D_6 az S-nek C_0C_8 tengelyén adódik, mert $C_0D_6 \parallel C_1C_7 \parallel C_0C_8$, hiszen $C_0C_1C_7D_6$ paralelogramma, másrészt mert a C_0 és C_8, valamint a C_1 és C_7 csúcsok egymás képei a C_4C_{12} tengelyre.

A $C_{15}C_{14} \ldots C_9$ törött vonalat a $\overrightarrow{C_{15}C_0}$ vektorral eltolva C_9 ugyancsak D_6-ba jut, hiszen új helyzete $C_{15}C_0 \# C_8C_7$ miatt paralelogrammát alkot a C_7, C_8, C_9 csúcsokkal, másrészt $C_9C_8C_7D_6$ ugyancsak paralelogramma, mert $C_8C_9 \# C_1C_0$ $\# C_7D_6$. A $C_1C_2 \ldots C_7$ és a $C_{15}C_{14} \ldots C_9$ törött vonal egymás tükrös párja a C_0C_8 tengelyre, másrészt kezdőpontjukat e tengely ugyanazon pontjába toltuk, ezért az eltolás utáni helyzetek is tükrösek C_0C_8-ra. Így C_{10}, …, C_{14} új helyzetét D_7-tel, …, D_{11}-gyel jelölve a $C_0D_1 \ldots D_6 \ldots D_{11} = T_{12}$ tizenkétszögnek egyrészt megvannak a feladatban előírt tulajdonságai, másrészt teljesül rá ezeknek az I. részben bebizonyított következménye: a szabályos 16-szög szögeitől különböző szögeinek csúcsa C_0 és D_6, és kerületének e két csúcs közötti részei $6-6$ oldalból állnak. Ezért az állítást T_{12}-re kell bebizonyítanunk.

Legyen a $D_1D_2D_3D_4D_5$ és $D_{11}D_{10}D_9D_8D_7$ törött vonalnak a $\overrightarrow{D_1C_0}$, ill. $\overrightarrow{D_{11}C_0}$ vektorral való eltolás utáni helyzete $C_0E_1E_2E_3E_4$, ill. $C_0E_7E_6E_5E_4$, az $E_1E_2E_3$ és $E_7E_6E_5$ törött vonalnak az $\overrightarrow{E_1C_0}$, ill. $\overrightarrow{E_7C_0}$ vektorral való eltolás utáni helyzete $C_0F_1F_2$, ill. $C_0F_3F_2$ (a fentiekhez hasonlóan E_4, ill. F_2 ismét közös végpontok a C_0C_8 tengelyen, és az új helyzetek is páronként tükrösek a tengelyre). A csúcsoknak az eltolásokban megtett útját is berajzolva S-et és benne T_{12}-t felosztottuk egységnyi oldalú rombuszokra, T_{12}-ben 15 rombusz keletkezett. A rombuszok tompaszöge a D_1, E_1, F_1 pontnál (és tükörképükben is, a következőket is így értve) S szögével egyenlő, ami egyszerű számítás szerint 7α, a C_2, D_2, E_2 pontnál 6α, a C_3, D_3, E_3 pontoknál, valamint D_6-nál 5α, D_4-nél 4α (derékszög), ennélfogva a hegyesszögek nagysága rendre α, 2α, ill. 3α. Így a rombuszok magassága rendre $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, ill. $\sin 4\alpha = 1$, és az egységnyi alapok miatt ennyi a területek mértékszáma is.

Mármost T_{12}-ben az α hegyes szöggel bíró rombuszok száma 5, a 2α, ill. 3α hegyesszöggel bíróké $4-4$, végül a négyzeteké 2. Ezek alapján – és figyelembe véve, hogy $\sin 3\alpha = \sin 5\alpha$ – a 15 rombusz területének összegére (1)-et kapjuk.

Katz Sándor (Paks, Vak Bottyán gimn. III. o. t.)
Mérő László (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az S idomot rombuszokra osztó hálózatot a $C_0C_1 \ldots C_7$ és $C_0C_{15} \ldots C_9$ törött vonalak C_0 körüli egymás utáni α, 2α, …, 6α szöggel való elfordításával is megkaphatjuk.

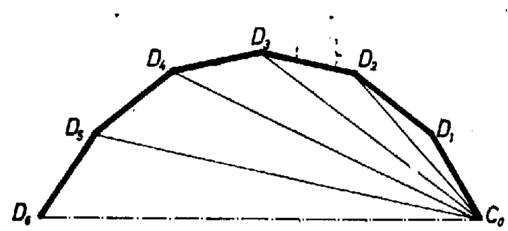
2. Megoldásunkból az is adódik, hogy S területe így is írható:

$$t_{16}=7\sin\alpha+6\sin 2\alpha+\ldots+2\sin 6\alpha+\sin 7\alpha.$$

Hasonlóan az $a=1$ oldalú szabályos $2n$-szög területe, $\alpha=2\pi/n$ jelöléssel

$$t_{2n}=(n-1)\sin\alpha+(n-2)\sin 2\alpha+\ldots+2\sin(n-2)\alpha+\sin(n-1)\alpha.$$

3. Felhasználva a fenti I. rész megállapítását (T-nek C_0D_6 egyik oldalán levő felét a C_0-bó1 kifutó átlókkal háromszögekre bontva az egymás utáni átlók közti szög mindig $\alpha/2$, az egymás utáni átlók a végpontjukba befutó, C_0-hoz közelebbi oldallal $\alpha/2$-nek rendre az 1-, 2-, 3-, 4-, 5-szörösét zárják be, a továbbmenő oldallal pedig a 13-, 12-, 11-, ill. 10-szeresét.



2. ábra

Így a háromszög $(c^2\sin\alpha\,\sin\beta)/(2\sin\gamma)$ területképlete alapján

$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{14\alpha}{2}+\sin\frac{2\alpha}{2}\sin\frac{13\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{12\alpha}{2}+\sin\frac{4\alpha}{2}\sin\frac{11\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{10\alpha}{2}\right).$$

Mindegyik szorzat második tényezője egy tompaszög színusza; ezt a kiegészítő hegyes szög színuszával helyettesítve

$$t=\sin\alpha+\frac{\sin\dfrac{2\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{4\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\dfrac{4\alpha}{2}\sin\dfrac{5\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\dfrac{5\alpha}{2}\sin\dfrac{6\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Mármost a

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin n\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\sin(n+1)\cdot\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

azonosság[1] felhasználásával a jobb oldal 2., 3., 4. és 5. tagja rendre $n=2$, 3, 4, ill. 5 értékkel 2, 3, 4, ill. 5 tagú összegként írható, és összevonás után (1)-et kapjuk.

Péli Katalin (Makó, József A. g. III. o. t.)

[1] Lásd pl. *Faragó László:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény (Középiskolai Szakköri Füzetek), 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963, 56. o., 526. feladat.