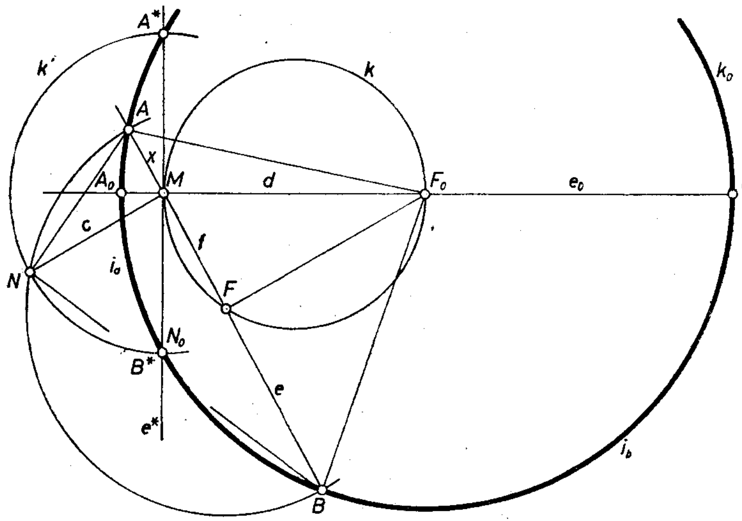
I. Az AM, MB szakaszokat először egyirányúaknak tekintjük. Az állandó $AM \cdot MB$ érték mértani középarányosuknak c-nek négyzete, $AM \cdot MB = c^2$. Feltesszük, hogy $c > 0$ (ugyanis $c = 0$ esetén $AM = 0$, az A pont állandóan M-ben van, így B az M-nek tükörképe F-re vonatkozóan, s ebből tüstént adódik, hogy B mértani helye az adott k kör 2-szeresre nagyított képe az M hasonlósági középpontból). Eszerint M mindig elválasztja A-t F-től és B-től.

Nyilvánvaló, hogy e bármely helyzetében F az e-nek k-val való, M-től különböző metszéspontja. Minden helyzetben M, F, c^2 és az $AM < MB$ feltétel egyértelműen meghatározza A és B helyzetét. A derékszögű háromszög magasságáról ismert mértani középarányos tételre gondolva egy megfelelő A, B pontpárt úgy kapunk, hogy az e-re M-ben emelt merőlegesre fölmérjük az $MN = c$ szakaszt, kört írunk F körül FN sugárral, ennek az FM félegyenesen levő metszéspontja A, e-vel való másik metszéspontja B (1. ábra).



1. ábra

Így ugyanis Thalész tétele szerint ABN derékszögű háromszög, és a derékszög csúcsa N. Az alábbi számítás pedig azt mutatja, hogy ez az egyetlen megoldás.

Legyen ugyanis $FM = f$ és $AM = x \quad (> 0)$, ekkor $MB = MF + FB = MF + AF = AM + 2MF = x + 2f$, az $x(x+2f) = c^2$ követelményből $x^2 + 2fx - c^2 = 0$, ennek gyökei valósak és ellentétes előjelűek, hiszen szorzatuk negatív, és a negatív gyök nem használható. Az adódó $x = \sqrt{f^2 + c^2} - f$ kifejezésből is kiolvasható A fenti szerkesztése.

e-nek csak az az e^* helyzete kivételes, amely érinti k-t, ekkor ugyanis F^* azonos M-mel és a mondott eljárás szerint kapott A^*, B^* pontpárra az $A^*M = MB^* = c$ egyenlőség teljesül, és ezt a feladat kizárta.

Az e néhány helyzetében így szerkesztett A, B pontpárok egy k_0 körön látszanak sorakozni, melynek középpontja M-nek k-beli átellenes pontja, F_0. (Az N pontok mindig az M körüli c sugarú k' körön adódnak.) Bebizonyítjuk, hogy e minden megengedett helyzetében $F_0A = F_0B$, állandó.

e-ként az $MF_0 = e_0$ egyenest véve legyenek a fenti eljárás során kapott pontok N_0, A_0, B_0, így

$$F_0A_0^2 = F_0B_0^2 = F_0N_0^2 = F_0M^2 + MN_0^2 = d^2 + c^2, \tag{1}$$

ahol d a k átmérője. e minden más, megengedett helyzetében F az F_0 merőleges vetülete e-n (Thalész), és $FA = FB$ folytán $F_0A = F_0B$. Továbbá

$$F_0B^2 = F_0F^2 + FB^2 = F_0F^2 + (MB - MF)^2 = (F_0F^2 + MF^2) + MB(MB - 2MF),$$

és itt az első zárójelben $F_0M^2 = d^2$ áll, a második zárójel pedig

$$(MB - MF) - MF = FB - MF = AF - MF = AM,$$

tehát, felhasználva (1)-et:

$$F_0B^2 = d^2 + MB \cdot AM = d^2 + c^2 = F_0A_0^2,$$

ami állításunkat igazolja, A és B a mondott k_0 kör pontjai. Ugyanez A^*-ra és B^*-ra is áll, és $e^* \perp e_0$ miatt mindegyikük játszhatja a fenti N_0 szerepét.

Pontosabban ezt találtuk: mivel M elválasztja A-t F-től, vagyis k-tól, azért e^* is elválasztja A-t k-tól, A a k_0-nak félkörnél kisebb $A^*B^* = i_a$ ívén van, B pedig a félkörnél nagyobb $A^*B^* = i_b$ ívén.

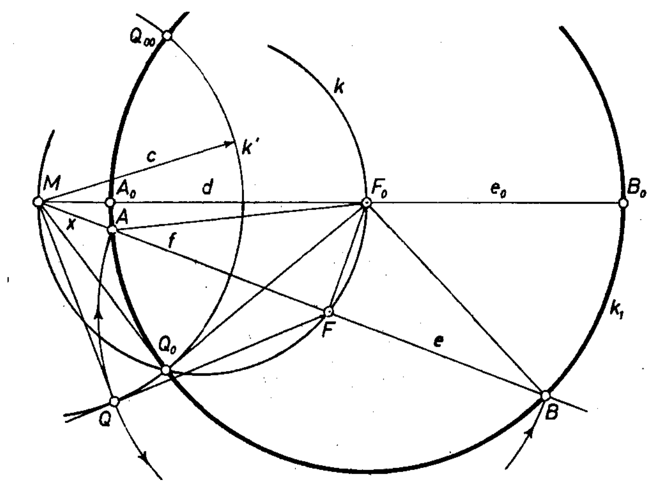
Bebizonyítjuk, hogy megfordítva, ha e-nek egy tetszés szerinti (de e^*-tól különböző) e' helyzete i_a-t A'-ben, i_b-t B'-ben metszi, akkor teljesül $A'M \cdot MB' = c^2$, és az $A'B'$ szakasz F' felezőpontja rajta van k-n. Valóban, e' és e^* a k_0-nak M-en átmenő és egymástól különböző szelői, ezért $A'M \cdot MB' = A^*M \cdot MB^* = c^2$. Továbbá $F_0F'A'\sphericalangle = F_0F'M\sphericalangle$ derékszög, tehát F' rajta van az MF_0 átmérőjű Thalész körön, vagyis k-n.

Ezek szerint az A-t és B-t szétválasztó M pont esetére A és B mértani helye a fent leírt k_0 körnek i_a ill. i_b íve, az ívek A^*, B^* végpontjai nem tartoznak hozzá a mértani helyhez.

II. MA-t és MB-t egyirányúaknak véve a pontok sorrendje M, A, F, B. Legyen ismét $MA = x$, és $MF = f = (MA + MB)/2$, így $MB = 2f - x$ és $0 < x < f$, továbbá $MA \cdot MB = c^2$. A követelmény:

$$c^2 - x(2f - x) = x^2 - 2fx + c^2 = 0,$$

innen $x = f - \sqrt{f^2 - c^2}$ (2. ábra).



2. ábra

Eszerint az F-ből az M körüli c sugarú k' körhöz húzott FQ érintőszakasszal mint sugárral rajzolt kör metszi ki e-ből F és M között A-t és F-en túl B-t.

e-nek több helyzete alapján az A és B pontokból ismét egy k_1 körnek két íve rajzolódik ki, középpontja a fenti F_0, átmérője az $MF_0 = e_0$ helyzetben adódó A_0B_0 szakasz. e-t az $MF_0 = e_0$ helyzettől egyre jobban elfordítva $MF = f$ csökken, és ha F-ként k és k' metszéspontját választjuk, vagyis ha $f = c$, akkor A is, B is Q_0 ban adódik, amit a követelmény kizárt. További elfordítás esetén (az e_0-ra merőleges helyzetig) nincs A, B pontpár, mert $MF < c$.

Valóban, e_0 esetén $f = MF_0 = d$ és $F_0A_0^2 = F_0B_0^2 = F_0Q_0^2 = d^2 - c^2$, általában pedig $F_0F \perp e$ és $FA = FB$ miatt $F_0A = F_0B$, így

$$F_0A^2 = F_0F^2 + FA^2 = F_0F^2 + FQ^2 = (F_0F^2 + FM^2) - MQ^2 = d^2 - c^2 = F_0A_0^2.$$

Pontosabban: A a k_1 kör kisebb Q_0Q_{00} ívének belső pontja – ahol Q_{00} a Q_0 tükörképe e_0-ra –, B pedig a nagyobb Q_0Q_{00} ív belső pontja (MQ_0 érinti k_1-et).

Az I. eset befejezéséhez hasonlóan belátható, hogy a mondott ívek minden belső pontja kiadódik A-ként, ill. B-ként, tehát A és B mértani helye a mondott két ív, a végpontok nélkül.

Ha $c \geqq d$, azaz k' magába zárja az adott k kört, akkor egyetlen A, B pontpár sem jön létre.

Tátray Péter (Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium)

Moson Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimnázium)

Megjegyzés. Az érdeklődőknek ajánljuk, keressék meg a kapcsolatot ezen feladat és az 1056. gyakorlat[1] között.

[1] K. M. L. 34 (1967) 70. o.