Hírt adtunk a Bolyai János matematikai tanulóverseny lefolyásáról és nyerteseiről. Az alábbiakban ismertetjük a versenyre beérkezett dolgozatokat és olvasóink megoldásait.

A nyertes dolgozatokból átvett megoldásokat szószerint közöljük, a szerkesztő szövegkiegészítéseit [ ]-zárójelbe tesszük.

I. Mutassuk meg, hogy ha n páratlan szám, akkor

$$46^n + 296 \cdot 13^n$$

osztható 1947*-tel!*

I. Megoldás: [$n = 2k + 1$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$) alakban írható, mivel páratlan szám.]

$$46^{2k+1} + 296 \cdot 13^{2k+1} = 46 \cdot 46^{2k} + 3848 \cdot 13^{2k} =$$
$$= 2(23 \cdot 2116^k + 1924 \cdot 169^k) = 2\{23 \cdot 2116^k + (1947 - 23) \cdot 169^k\} =$$
$$= 2\{1947 \cdot 169^k + 23(2116^k - 169^k)\}.$$
$$2116 - 169 = 1947, \quad \text{tehát} \quad 2116^k - 169^k =$$
$$= [(2116 - 169)(2116^{k-1} + 2116^{k-2} \cdot 169 + \ldots + 2116 \cdot 169^{k-2} + 169^{k-1})] = 1947q$$

és

$$1947 \cdot 169^k + 23(2116^k - 169^k) = 1947Q,$$

ahol q és Q egész szám.

Pollák György versenynyertes dolgozatából.

Megoldotta: Fülöp M., Tóth T. *versenydolgozata, továbbá* Kocsis K., Párkány M., Tamás H.

Megjegyzés: A megoldás lényegében a $46^{2k+1} + 296 \cdot 13^{2k+1} = 46 \cdot 46^{2k} + 296 \cdot 13 \cdot 13^{2k} = 46(46^{2k} - 13^{2k}) + (46 + 296 \cdot 13) \cdot 13^{2k}$ átalakítást használja.

II. Megoldás: $46^{2k+1} + 296 \cdot 13^{2k+1} = \{46^{2k+1} + (296 \cdot 13)^{2k+1}\} - 13^{2k+1}(296^{2k} - 1)$.

Az első tag osztható $46 + 296 \cdot 13 = 2 \cdot 1947$-tel, $296^{2k} - 1$ pedig $(296 + 1)(296 - 1) = 9 \cdot 33 \cdot 59 \cdot 5 = 1947 \cdot 45$-tel, tehát az egész kifejezés osztható 1947-tel.

Kis hibával megoldotta Kántor K., Gaál E. *versenydolgozata.*

III. Megoldás: $1947 = 33 \cdot 59$. Mivel $a^n - b^n$ osztható $a - b$-vel és ha n páratlan szám, akkor $a^n + b^n$ is osztható $a + b$-vel, így $46^n + 296 \cdot 13^n = 46^n - 13^n + 9 \cdot 33 \cdot 13^n$ osztható $46 - 13 = 33$-mal és ha n páratlan
$46^n + 296 \cdot 13^n = 46^n + 13^n + 5 \cdot 59 \cdot 13^n$ osztható $46 + 13 = 59$-cel.

Mivel 33 és 59 relatív prím számok, tehát kell, hogy szorzatuk: $33 \cdot 59 = 1947$ is osztója legyen $46^n + 206 \cdot 13^n$-nek, ha n páratlan szám.

Vermes Róbert (Bp.-i Zsidó gimn. VIII. o.)

Megoldotta: Szőke L. *versenydolgozata, továbbá* Gaál I., Szépfalussy P.

IV. Megoldás: Állításunkat teljes indukcióval bizonyítjuk:
ha $n = 1$,

$$46 + 296 \cdot 13 = 2 \cdot 1947.$$

Tegyük fel, hogy valamely n páratlan számra már tudjuk a tétel helyességét $46^n + 296 \cdot 13^n = 1947 \cdot q$, q egész. Innen $296 \cdot 13^n = 1947 \cdot q - 46^n$. Vizsgáljuk az összeget a következő páratlan kitevőre: $46^{n+2} + 296 \cdot 13^{n+2} = 46^{n+2} + (296 \cdot 13^n)13^2 = 46^{n+2} + 1947 \cdot q \cdot 13^2 - 13^2 46^n = 1947 \cdot 13^2 q + 46^n(46^2 - 13^2) = 1947 \cdot 13^2 q + 46^n 33 \cdot 59 = 1947 \cdot Q$, ahol Q ismét egész szám. Ezzel bebizonyítottuk tételünket.

Megoldotta: Máyer I., Abonyi I., Síposs G. *versenydolgozata, továbbá* Gehér L., Gősy S., Károlyházy F.

Elég jó: Horváth M. *versenydolgozata.*

Osztásmaradékokkal számol (2 pont): Hosszú M., Izsák I., Korda J., Kővári T., Róna P., Sós Vera, Szabó Gy., Székely-Doby S., Ungár P. *versenydolgozata, továbbá* Gacsályi S.

Kis számolási hibával (2 pont): Czipszer J., Tarnóczi T.

II. Bizonyítsuk be, hogy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást.

Sajnos, a „kölcsönös” szó zavaró volt és néhányan egyoldalú ismeretségekre is gondoltak. Így persze nem igaz a tétel: állítsuk pl. libasorba a társaságot és mindenki ismerje az előtte levőket. Ekkor bármely két ember közt van ismeretség, de mindég csak egyoldalú. Erre a példára mutat rá Bede István versenydolgozatában. Többen azt is megjegyzik, hogy öttagú társaságra nem igaz a tétel. Erre meg „ellenpélda” egy olyan öttagú társaság, amelyik körbe állítható úgy, hogy mindenki csak a két szomszédjával legyen ismeretségben.

Megoldás: Tekintsük a társaság egyik tagját, A urat. Ha ez kettőnél többet ismer és ezek közül kettő ismeri egymást, akkor már van három egymást kölcsönösen ismerő tag; ha pedig egyik sem ismeri a másikat, a második eset következik be. Ha A úr ismerőseinek száma nem haladja meg a kettőt, vagyis az előtte ismeretlenek száma legalább három, akkor ez utóbbiak vagy mind ismerik egymást, (1. eset) vagy van köztük legalább kettő, akik nem ismerik egymást. Minthogy ezek A úr előtt is ismeretlenek, a társaságnak megint van 3, kölcsönösen ismeretlen tagja.

Pollák György versenynyertes dolgozatából.

Megoldotta: Gaál I., Kővári T., Magyar Á. Sz., Sós Vera (lényegtelen hibával), Ungár P. *versenydolgozata, továbbá* Czipszer J., Károlyházy F., Róna P., Személyi J.

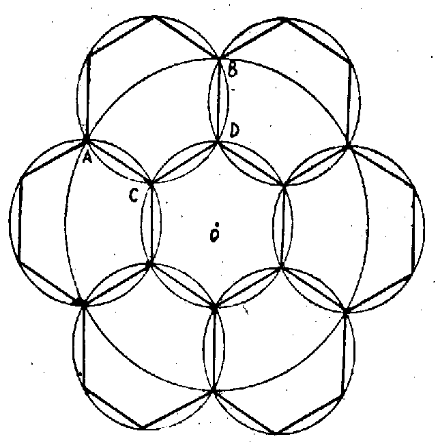
Elég jó (2 pont): Párkány M., Tarnóczi T. *megoldása.*

Van gondolat: Izsák I., Szőke L., Török A. *versenydolgozatában.*

III. Egy körlapot feleakkora átmérőjű körlapokkal akarunk befedni. Hogyan tehetjük ezt meg a legkevesebb számú körlappal?

Megoldás: [Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy] a befödendő kör sugara legyen 1.

1. [Hét kis körrel le lehet fedni a nagyot.] Beleírunk egy szabályos hatszöget, oldalainak középpontjai köré írunk egy-egy 1/2 sugarú kört, továbbá az eredeti kör középpontja köré is írunk egyet és azt állítjuk, hogy a kört lefedtük.



34. ÁBRA

[Tudjuk, hogy egybevágó szabályos hatszögekkel be lehet úgy fedni a síkot, hogy a hatszögek közt hézag sem marad, de egymást nem is fedik.] A 34. ábrán 7 darab [így illeszkedő] 1/2 oldalú szabályos hatszöget látunk. [Jelöljük a belső hatszög középpontját O-val; A és B legyen egy külső hatszögnek az a két szemközti csúcsa, melyek közül egyik sem csúcsa a belső hatszögnek, C és D pedig a belső hatszöggel közös csúcsok.] $OA = 1 = OB$, [mert OA és OB is szimmetriatengelye az ábrának s így kell, hogy C, ill. D is ezekre az egyenesekre essék. Már pedig $OC = OD = CA = DB = 1/2$.] A berajzolt nagy kör sugara tehát 1, és az, mint látható, a hatszögek által befödetik. A hatszögek köré írt 1/2 sugarú körök ezért még inkább befedik a nagy kört.

2. Most azt bizonyítjuk, hogy hét körnél kevesebb nem elég. Az egy darab 1/2 sugarú kör által befedett kör*ív* végpontjainak távolsága ≤ 1, mert félsugarú körön belül bármely két pont távolsága ≤ 1. Ezért az egy kör által befedett ívhez tartozó középponti szög $\leq 60^\circ$, vagyis az általunk megadotton kívül minden más lefedésnél [már] a kör*vonal* lefedéséhez 7 kör kell, vagy több.

3. [Hét kis kör is csak az adott elrendezésben fedi be egészen a nagy kört.] Ha egy kör az O pontot fedi, akkor a kerületnek legfeljebb egy pontját fedi le, ha tehát a kerületet hét kör fedi le, akkor a középpont lefedéséhez feltétlenül kell egy nyolcadik. [Hat körrel pedig csak a megadott módon lehet lefedni az egész kerületet.]

Ungár Péter (VIII. o.) díjnyertes dolgozatából.

3 *kivételével* (3 pont): Fülöp M., Gaál E., Göndöcz I., Hosszú M.,

Megoldotta: Bede I. *versenydolgozata, továbbá* Czipszer J., Izsák I., Kővári T., Magyar Á. Sz., Máriaföldy Julianna, Máyer I., Pollák Gy., Sós Vera, Szabó Gy., Tavaszy M. és egy névtelen *versenydolgozat, továbbá* Gaál I.,. Gacsályi S., Gehér L., Gősy S., Károlyházy F., Madarassy Gy., Személyi J.

Elég jó (1 pont): Alkonyi I., Emőd (Eichner) I., Erdei M., Gargya L., Kántor K., Kertész I., Korda J., Lichtenstein Gy., Makay S., Róna P., Síposs G., Székely-Doby S., Szőke L., Varsányi F. *versenydolgozata, továbbá* Lichtenstein J., Párkány M., Serédi B., Szépfalussy P., Tarnóczi T., Vermes R. *megoldása.*

Megjegyzés: A probléma a következő módon általánosítható. Vegyünk kör helyett bármilyen konvex idomot. – Konvexnek nevezünk egy idomot, „ha sehol sincs behorpadva”, vagyis ha bármely két a belsejében fekvő pontot összekötve az összekötő egyenes is a belsejében lesz. – Kicsinyítsük le az idomot 2 : 1 arányban és ilyenekkel próbáljuk meg lefedni a nagyot, de úgy, hogy a kis idomokat közben el ne forgassuk, csak önmagukkal és a naggyal párhuzamos helyzetben tologassuk. Egy háromszög befedésére pl. 4 feleakkora háromszög elég, ha az oldalak középpontjait összekötjük, de ekkor a középső kis háromszög 180°-kal el van fordítva. Párhuzamos háromszögekből már hatra van szükség. – Hajós György vetette fel a kérdést, hogy általában hány párhuzamos, feleakkora idom szükséges a befedéshez. Ő is, Kárteszi Ferenc is, megtalálták a választ; bebizonyították, hogy hét kis idom, bármilyen konvex idomnál elegendő. Kevesebb nem lehet általában elegendő, de háromszögnél 6 kis idom is elegendő, paralelogrammánál már 4, trapéznál meg az alakjától függően 5 vagy 6.