Az 5. feladat megoldásával a Legendre-féle

$$n! = 2^{[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{4}]+[\frac{n}{8}]+\cdots} \cdot 3^{[\frac{n}{3}]+[\frac{n}{9}]+[\frac{n}{27}]+\cdots} \cdot 5^{[\frac{n}{5}]+[\frac{n}{125}]+\cdots}$$

azonosságban (ahol a prímszámok persze n-ig mennek) olyan kulcshoz jutottunk, amely alkalmas egyes, a prímszámokra vonatkozó kérdések megoldására. De vajon hogyan forgassuk ezt a kulcsot, hogy a Csebysev-tétel nyitját megtaláljuk? Mit kezdjünk az $n!$-sal, hogy épp az n és $2n$ közötti prímszámokról tudósítson bennünket?

Csebysev eredeti bizonyítása egy nagyon bonyolult, az $n!$ segítségével képezett kifejezés vizsgálatán alapul. Erdős (és már előtte Ramanujan is a Csebysev-féle kifejezés helyett a sokkal egyszerűbb

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \ldots n \cdot (n+1)(n+2)\ldots 2n}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot 1 \cdot 3 \ldots n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

kifejezést használja. Ezt a kifejezést $\binom{2n}{n}$-nel (mondd: $2n$ alatt n, vagy $2n$ az n felett) szokás jelölni: általában $\binom{m}{n}$-nel az $\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ kifejezést jelöljük. Ez arról nevezetes, hagy egy m-tagú osztályból ennyi féleképpen lehet kijelölni egy n-tagú küldöttséget; így $\binom{m}{n}$ csak látszólag tört, valójában mindig egész szám az értéke. De Erdős sem azért gondolt arra, hogy, $\binom{2n}{n}$ segítségével fogjon hozzá a Csebysev-tétel bizonyításához, mert ha egy $2n$-tagú osztálynak pontosan a felét visszük kirándulni, akkor éppen $\binom{2n}{n}$-féleképpen lehet kijelölni, hogy kik jussanak a kirándulók közé. Hanem azért, mert $\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1 \cdot 2 \ldots n}$ meg kell, hogy érezze, hogy n és $2n$ között vannak prímszámok. Hiszen ezekkel a prímszámokkal minddel osztható, mert a számlálója osztható velük, de a nevezője nem; az n-ig terjedő prímszámok azonban a nevezőjében is előfordulnak, így ezek közül sok kiesik egyszerűsítés közben. Várható hát, hogy ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából sokkal kisebb értéket kapunk $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójában. Ismerkedjünk meg hát közelebbről a $\binom{2n}{n}$-nel!

6. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor $[2a] - [a]$ értéke vagy 0, vagy 1.

7. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ mindig egész szám.

8. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ törzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$-nél. (A hatványról van szó, nem a hatványkitevőről!)

9. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában a $\sqrt{2n}$-nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek (azaz vagy nem szerepelnek, vagy csak első hatványon).

10. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható a $\frac{2}{3}n$ és n közötti prímszámokkal (n-et beleértve, ha prímszám; $\frac{2}{3}n$-et akkor sem értve bele, ha n osztható 3-mal és $\frac{2}{3}n$ prímszám).