Az A, B és C, D számjegy-párok ismétlődése alapján a keresett N^2 szám így írható:

$$101 \cdot \overline{AB} \cdot 10^4 + 101 \cdot \overline{CD} = 101(\overline{AB} \cdot 10^4 + \overline{CD}) = 101\ K.$$

Mivel 101 törzsszám, és négyzetszámnak különböző alapú törzsszámhatványok szorzatára való felbontásában minden kitevő páros, azért a K szám egy négyzetszám 101-szerese. Továbbá $10^4 = (10^4 - 1) + 1 = 101 \cdot 99 + 1$, így

$$K = 101 \cdot 99 \cdot \overline{AB} + (\overline{AB} + \overline{CD}) = 101 \cdot M^2,$$

(azaz $M = N/101$), tehát $\overline{AB} + \overline{CD}$ is (pozitív egész) többszöröse 101-nek. Ámde $1 \leq \overline{AB} < 100$ és $1 \leq \overline{CD} < 100$ miatt $2 \leq \overline{AB} + \overline{CD} < 200$, és 101-nek már a 2-szerese is több 200-nál, ezért

$$(1) \qquad \overline{AB} + \overline{CD} = 101, \qquad \text{így} \qquad M^2 = 99 \cdot \overline{AB} + 1,$$

$$(2) \qquad (M-1)(M+1) = 3^2 \cdot 11 \cdot \overline{AB}.$$

Ismét $1 \leq \overline{AB} < 100$ miatt M^2 legalább háromjegyű, legföljebb négyjegyű négyzetszám, vagyis egy valódi kétjegyű szám négyzete.

(2) bal oldalának egyik tényezője osztható 11-gyel. Úgyszintén egyik tényező osztható 9-cel, mert nem lehet mindkét tényező 3-mal osztható, ugyanis különbségük 2.

Próbálkozzunk olyan megoldással, melyben (2) bal oldalának ugyanazon tényezője osztható 9-cel is, 11-gyel is, vagyis 99-cel is. Ez $M < 100$ miatt csak $M + 1$ lehet, ha $M = 98$, ekkor $M - 1 = 97 = AB$, továbbá (1) alapján $CD = 4 = 04$. Így $A = 9$, $B = 7$, $C = 0$, $D = 4$, különbözők, megoldást kaptunk. (Valóban, így $N = 101 \cdot M = 9898$, és $N^2 = 9797\,0404$, ami már a fentiekből szükségképpen következik.)

Olyan megoldást keresve, melyben (2) bal oldalának egyik tényezője 11-gyel, a másik 9-cel osztható, elég a $11\,k \pm 2$ számok 9-cel való oszthatóságát vizsgálnunk, hiszen a tényezők különbsége 2. Csak $k = 1$ és $k = 8$ esete ilyen: 9 és 11, ill. 88 és 90, de az elsőből $AB = 1 = 01$, $\overline{CD} = 100$ adódik, ami nem felel meg; a másodikból viszont $AB = (88{\cdot}90)/99 = 80$, $\overline{CD} = 21$, és ez ismét megoldás: $A = 8$, $B = 0$, $C = 2$, $D = 1$ ($M = 89$, $N^2 = 8989^2 = 8080\,2121$). Több megoldás nincs.

Horváth Sándor (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan jutunk el a megoldásokhoz (1)-ből $\overline{AB}$ kiküszöbölése útján is: $M^2 = 99\,(101 - \overline{CD}) + 1 = 100^2 - 99 \cdot CD$, $(100 - M)(100 + M) = 3^2 \cdot 11 \cdot \overline{CD}$.

2. Ugyanez az egyenlet így is írható: $M^2 = 100^2 - (100 - 1) \cdot \overline{CD} = (100 - \overline{CD}) \cdot\ \cdot 100 + \overline{CD}$, ami szerint M^2-et két kétjegyű számra vágva e részek összszege 100. Végigfutva a kétjegyű számok négyzetén, csak $89^2 = 7921$-nek és $98^2 = 9604$-nek van meg ez a tulajdonsága, $\overline{CD} = 21$ vagy 04.

Kevesebb próba is elég annak figyelembevételével, hogy $\overline{CD}$ kétjegyű négyzetvégződés, így csak 22 különböző értéket vehet fel. Képezve ezekhez $100 - \overline{CD}$-t – pl. $\overline{CD} = 56$ esetében 44-et – csak azt kell megnéznünk a táblázatban, négyzetszám-e 4456.

Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. g. III. o. t.)

3. M^2-nek az előző megjegyzés szerinti kettévágását így is kimondhatjuk: M^2-nek a száz-alapú számrendszerben vett két számjegye együtt százat kell hogy adjon.

A száz-alapú számrendszerben ugyanaz az oszthatósági ismertetőjel érvényes a „százegy”-gyel való oszthatóságra, mint a tíz-alapú rendszerben a tizenegyre. (Az utóbbi szerint a szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha jobbról bal felé haladva minden második jegy elé mínuszjelet gondolva, az összes jegyek 11-gyel osztható összeget adnak. Ezt alkalmazva a fenti $K = \overline{AB00CD}$ számra, kapjuk (1)-et.