I. megoldás. Adjuk hozzá a polinomhoz x^3-t és vonjuk is ki belőle. Ekkor, ismert azonosság alapján

$$P(x) = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^2 + x + 1) - \\ - (y - 1)(x^2 + x + 1) = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1),$$

tehát az illető sejtése igaz.

Bán Ilona (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. IV. o.t.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan, a mértani sorozat összegképletét fölhasználva

$$P(x) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x) = \\ = \frac{x^6 - 1}{x - 1} - \frac{x(x^3 - 1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1}(x^3 + 1 - x) = \\ = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1).$$

Cserha Gabriella (Makó, József A. g. II. o. t.)

2. A talált felbontás megtalálható az 1289. feladatban is, K. M. L. 29 (1964) 128. o.

Ilyen szerencsés észrevétel hiányában az alábbiak szerint jutunk megoldáshoz.

II. megoldás. Keressünk fölbontást egy harmad- és egy másodfokú, egész együtthatós polinom szorzatára:

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q) \tag{2}$$

alakban. A két tényező legmagasabb fokú tagjában az együtthatók abszolut értéke csak 1 lehet, hiszen (2) azonosság volta miatt szorzatuk egyenlő x^5 együtthatójával, közös előjelüket pedig választhatjuk pozitívnak. Ugyanígy a változót nem tartalmazó tag jobbról és balról: $cq = 1$, így vagy $c = q = 1$, vagy $c = q = -1$. Abból, hogy x^4, x^3, x^2 és x együtthatója is egyenlő az azonosság két oldalán, az a, b, p ismeretlenekre az első esetben a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$a + p = 1, \tag{3}$$
$$b + ap + 1 = 0, \tag{4}$$
$$1 + bp + a = 0, \tag{5}$$
$$p + b = 0. \tag{6}$$

(3) és (6), valamint (5) és (4) különbségéből, az első különbség értékét mindjárt behelyettesítve

$$a - b = 1,$$
$$(a - b) + p(b - a) = (a - b)(1 - p) = 1 - p = 0,$$

azaz $p = 1$, ezért (3)-ból $a = 0$, (6)-ból $b = -1$. Ez az értékhármas mind a négy egyenletet kielégíti, tehát

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1),$$

a sejtés helyes. – Így a $c = q = -1$ eset vizsgálata fölösleges.

Grandpierre Attila (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Azt, hogy $P(x)$ nem bontható egész együtthatós első és negyedfokú polinom szorzatára, beláthatjuk az együtthatók összehasonlítása nélkül is. Az elsőfokú polinom csak $x - c$ alakú lehetne s ekkor a c egész szám gyöke lenne a $P(x) = 0$ egyenletnek. Azonban $P(x) = x^4(x + 1) + 1$. Ha x egész, akkor itt az első tag páros szám (vagy x, vagy $x + 1$ páros), s így $P(x)$ értéke páratlan, tehát nem 0.

Vetier András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. Sejtést kaphatunk a polinom felbontására, ha elemezzük a kérdés felvetőjének észrevételeit. Véve pl. a törzsszámhatványok szorzatára való alábbi felbontásokat. (amelyekben kevés és nagyobb törzsszám lép fel):

$$P(4) = 1281 = 3 \cdot 7 \cdot \mathbf{61}, \quad P(6) = 43 \cdot \mathbf{211}, \quad P(7) = 3 \cdot 19 \cdot \mathbf{337},$$
$$P(-4) = -13 \cdot \mathbf{59}, \quad P(-8) = -3 \cdot 19 \cdot \mathbf{503},$$

a vastagon szedett törzstényezők (az utóbbi kettőhöz hozzácsatolva a mínusz jelet is) rendre közel állnak a választott x érték köbéhez, $4^3 = 64$-hez, $6^3 = 216$-hoz, $7^3 = 343$-hoz, $(-4)^3 = -64$-hez, $(-8)^3 = -512$-höz, és a hiány rendre 3, 5, 6, ill. -5, -9, minden esetben 1-gyel kisebb a beírt x-nél, vagyis e tényezők $x^3 - (x - 1)$ alakban írhatók.

A vékonyan szedett tényező viszont, vagy az ilyen tényezők szorzata x^2-hez áll közel:

$$3 \cdot 7 = 21 \text{ és } 16, \qquad 43 \text{ és } 36, \qquad 3 \cdot 19 = 57 \text{ és } 49,$$
$$13 \text{ és } 16, \text{ végül} \qquad 57 \text{ és } 64,$$

ez pedig az $x^2+(x+1)$ tényezőt sejteti. Bármelyikkel osztva $P(x)$-et, nincs osztási maradék, a sejtés helyes.

3. A kérdés felvetőjének szerencséje volt a sejtéssel. Ellenpélda az

$$\frac{5}{6}x^3-x^2+\frac{1}{6}x \qquad \left(=x^3-x^2-\frac{(x-1)x(x+1)}{6}\right)$$

polinom: minden egész x helyen egész az értéke.

4. A feladat hátterében *Gauss* következő tétele van: *ha egy egész együtthatós polinom felbontható racionális együtthatós polinomok szorzatára, akkor felbontható egész együtthatósak szorzatára is* (amelyek a racionális felbontáshól egy konstanssal és a reciprokéval való szorzás útján keletkeznek).