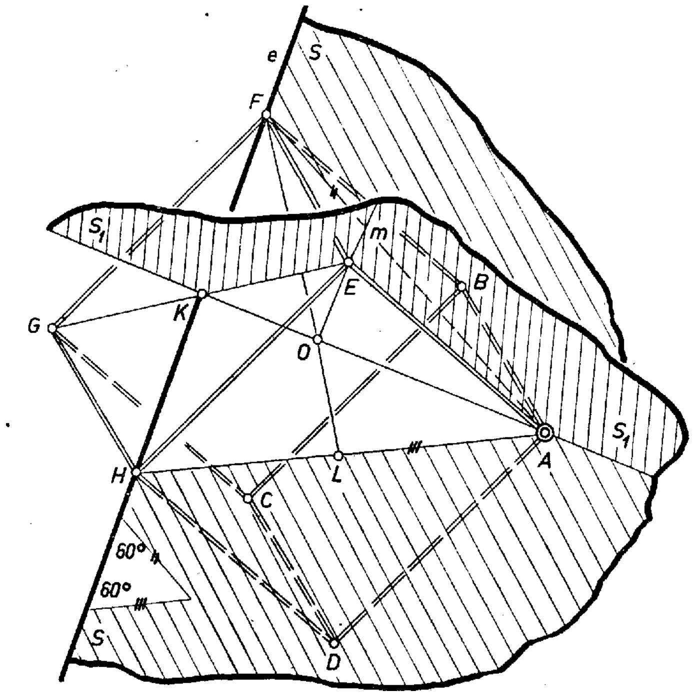
I. megoldás. 1. Legyen a keresett kockának az adott e-t tartalmazó lapja. $EFGH$, az e-n fekvő lap–átló FH, a szemben levő lap pedig $ABCD$ úgy, hogy a kocka hátra levő élei AE, BF, CG, DH.

FA és HA szintén lapbeli átlók, hosszuk egyenlő FH-val, ezért FHA egyenlő oldalú háromszög, benne fekszik az e és A által meghatározott S síkban.



1. ábra

EA, EF és EH a kocka élei, egyenlők, ezért $AFHE$ szabályos háromoldalú gúla, E főcsúcsa rajta van az AFH alap O középpontjában S-re állított merőlegesen. Továbbá az $AEO = S_1$ sík e gúlának szimmetriasíkja, tehát FH-t a K felezőpontjában metszi, ez az $EFGH$ lap középpontja, az EG lapátlót is felezi, és így $KE = EG/2 = FH/2 = KF$.

2. Ezek alapján a szerkesztés a következő. Az S síkban e-nek tetszés szerinti szakasza fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk, majd újabb két oldalával párhuzamost húzunk A-n át, ezek e-ből kimetszik az F, ill. H csúcsot. Megfelezzük az FH, HA oldalt a K,-ill. L ponttal, ekkor AK és FL metszéspontja O. O-n át m merőleges egyenest állítunk S-re, majd az A és m által meghatározott S_1 síkban K körül KF sugárral írt körrel m-ből kimetsszük E-t. A hátra levő csúcsokat hárnmszögeknek paralelogrammává való kiegészítésével kapjuk: AEF-ből B-t, FEH-ból G-t, HEA-ból D-t, végül pl. BAD-ból C-t.

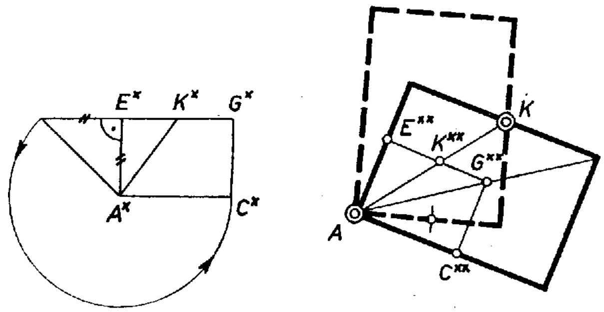
3. Alakzatunk valóban kocka. Ugyanis S_1 merőleges S-re; metszésvonaluk AK, erre merőlegesen áll FH, így FH merőleges S_1-re, tehát az S_1-beli KE-re is. Ezért $EFGH$, mint egymásra merőleges és egyenlő hosszú átlókkal bíró paralelogramma, négyzet. Ugyanez áll $EABF$-re és $EHDA$-ra, mert ezek előállíthatók $EFGH$-ból EO körüli $120°$-os forgatással. Az utoljára szerkesztett C csúcs benne van a GHD és a GFB síkban is, mert szerkesztésünk szerint $DC \# AB \# EF \# HG$ és $BC \# AD \# EH \# FG$, és a mondott háromszögeket egyenlőoldalú paralelogrammává egészíti ki. Ezek négyzetek, úgyszintén $ABCD$ is, mert mindegyik szögük egyállású a fentebbi 3 négyzet egyik szögével.

4. A szerkesztés mindig végrehajtható, ha A nincs rajta e-n, mert a felhasznált kör metszi m-et. Ugyanis, $KA = d$ jelöléssel $KO = d/3$, $KE = KF = d/\sqrt{3}$, így $KE > KO$. E számára 2 metszéspont adódik, a belőlük származtatott 2 kocka egymás tükörképe S-re.

Lengyel Erzsébet (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.) és
Somogyi Árpád (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
dolgozatából, a bizonyítással kiegészítve

Megjegyzések. 1. Az m egyenest az alábbiak szerint szerkeszthetjük, *mindig csak síkbeli szerkesztést végezve.* m-et megadja pl. annak a 2 síknak a metszésvonala, mely átmegy O-n és merőleges AK-ra, ill. FL-re. Egy ilyen síkot, pl. az AK-ra merőlegesen állót, két az O-n átmenő egyenesével határozunk meg: felveszünk AK-n át 2 különböző síkot – egyikük lehet pl. S – és mindegyikben megszerkesztjük az O-n átmenő, AK-ra merőleges egyenest. Ezek után a két merőleges síknak egy az O-tól különböző közös pontját, vagyis m egy további pontját úgy kapjuk, hogy az AK-ra merőleges síknak egy O-t nem tartalmazó egyenesén megkeressük az FL-re merőleges síkkal való döféspontot. (Az utolsó lépésre, ti. az egyenes és a sík metszéspontjának meghatározására a térbeli szerkesztésekben az a megállapodás, hogy ha az egyenes és a sík adottak és tudjuk, hogy van metszéspontjuk – vagyis az egyenes nincs benne a síkban és nem is párhuzamos vele –, akkor a metszéspontot is adottnak tekintjük.)

2. E-t m-ből kimetszhetjük az AK szakasz fölé írt Thalész–körrel is. Ekkor a szerkesztés helyességének bizonyításában számításra van szükség: $KA = FH \cdot \sqrt{3}/2$, $KO = KA/3$, és mértani középarányosukként $KE^2 = KA \cdot KO = KA^2/3 = FH^2/4$, $KE = FH/2$.



2. ábra

II. megoldás (vázlat). Az A-n átmenő és az e-re merőleges S_1 sík metszéspontja K, e sík a kockából az $AEGC$ téglalapot metszi ki, melyben $AE : EG = 1 : \sqrt{2}$ és K felezi EG-t. Eszerint az AK szakaszhoz hasonlósági transzformációval megszerkeszthetjük a téglalapot. (Egy tetszés szerinti egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójával és átfogójával, mint oldalakkal, $A^*E^*G^*C^*$ téglalapot szerkesztünk, vesszük az $E^*G^*(= A^*E^* \cdot \sqrt{2})$ oldal K^* felezőpontját, A^*K^*-ot fölmérjük az AK félegyenesre az AK^{**} helyzetbe, az AK^*E^* háromszöget, majd a téglalapot átmásoljuk az $AK^{**}E^{**}$, ill. $AE^{**}G^{**}C^{**}$ helyzetbe, végül ezt nagyítva kapjuk $AEGC$-t.) Ebből pedig K-n átmenő középvonala körüli 90°-os elfordítással megkapjuk a további 4 csúcsot.