I. megoldás. I. Ismeretes a gimnáziumi IV. o. tananyagból, hogy egy harmadfokú egyenletnek legfeljebb 3 gyöke van. Arra az esetre szorítkozunk vizsgálódásunkban, amikor (1)-et három különböző valós szám elégíti ki, legyenek ezek x_1, x_2, x_3. Ekkor az $(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$ szorzat azonos (1) bal oldalával, vagyis a szorzat polinom alakjának együtthatói rendre egyenlők (1) együtthatóival. Ebből

$$-(x_1+x_2+x_3)=p, \qquad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q, \qquad -x_1x_2x_3=r. \tag{3}$$

Hasonlóan a keresett

$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0 \tag{4}$$

egyenlet együtthatói a kívánt gyökökkel így fejezhetők ki:

$$p'=-(x_1^3+x_2^3+x_3^3), \quad q'=x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3, \quad r'=x_1^3x_2^3x_3^3.$$

Nyilvánvalóan $r'=r^3$. A p' és q' kiszámítása céljára emeljük köbre az $\alpha+\beta+\gamma$ kifejezést, és a köböt alakítsuk az alábbiak szerint

$$\begin{gathered}(\alpha+\beta+\gamma)^3=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)+6\alpha\beta\gamma=\\ =(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma)+3(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha\beta\gamma)+3(\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2+\alpha\beta\gamma)-\\ -3\alpha\beta\gamma=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma,\end{gathered}$$

amiből

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma. \tag{5}$$

Alkalmazzuk (5)-öt egymás után az
I. $\alpha=x_1$, $\beta=x_2$, $\gamma=x_3$, és II. $\alpha=x_1x_2$, $\beta=x_1x_3$, $\gamma=x_2x_3$
számhármasokra.
Az I. esetben (3) felhasználásával

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p'=(-p)^3-3(-p)\cdot q+3\cdot(-r),$$

amiből

$$p'=p^3-3pq+3r.$$

II. esetén

$$\begin{gathered}\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=pr,\\ \alpha+\beta+\gamma=q, \quad \alpha\beta\gamma=(x_1x_2x_3)^2=r^2,\end{gathered}$$

és így

$$x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=q'=q^3-3pqr+3r^2.$$

Ezek szerint a keresett egyenlet

$$x^3+(p^3-3pq+3r)x^2+(q^3-3pqr+3r^2)x+r^3=0. \tag{6}$$

A tett korlátozás folytán x_1^3, x_2^3, x_3^3 ugyancsak különböző valós számok, mindegyik kielégíti (4)-et, így (6)-nak nincs is más gyöke. Fordítva: ha valamilyen módon megkapjuk (6) gyökeit, és azok valósak és különbözők, akkor köbgyökük – ami (valós számokra szorítkozva) egyértelműen kiszámítható – rendre megadja (1) gyökeit.

II. Amennyiben föltevésünk (2)-re teljesül, alkalmazzuk (6)-ot (2)-re egymás után háromszor. Esetünkben $p=-3$, $q=-0{,}5$, $r=0{,}5=1/2$, így az első új egyenlet együtthatói

$$p'=-27-4{,}5+1{,}5=-30; \qquad q'=1{,}625, \qquad r'=(1/2)^3.$$

A 2. és 3. lépésben az adódó sokjegyű részeredményeket kerekítjük úgy, hogy a legnagyobb abszolút értékű tagból 5 értékes számjegyet tartunk meg, a kisebb abszolút értékű tagokból pedig az így adódott helyi értékű jegyeket:

$$\begin{gathered}p''=p'^3-3p'q'+3r'\approx-27\,000-146+0=-27\,146,\\ q''\approx-4{,}291-18{,}281+0{,}047=-22{,}525, \qquad r''=(1/2)^9;\\ p'''\approx-2{,}0004\cdot10^{13}-0-0\approx p''^3, \qquad r'''=(1/2)^{27},\\ q'''\approx-11{,}429-3583+0=-15\,012.\end{gathered}$$

Eszerint, ha (2) gyökei valósak és különbözők, akkor 27. hatványaik kielégítik a következő harmadfokú egyenletet:

$$y^3 - 2{,}0004 \cdot 10^{13} y^2 - 15\,012 y + (1/2)^{27} = 0. \tag{7}$$

Az 1420. feladat analógiájára azt sejtjük, hogy a (7) két-két szomszédos együtthatópárjából képezett hányadosok (-1)-szerese rendre közelítő értéket ad ezen egyenlet egy-egy gyökére. Ezért kiszámítjuk a mondott számok 27. gyökét, majd behelyettesítjük (2) bal oldalába.

A 27. gyököket a köbtáblázat egymás után háromszori alkalmazásával határozzuk meg:

$$\sqrt[27]{-\frac{p'''}{1}} \approx \sqrt[9]{-p''} \approx \sqrt[9]{27\,146} \approx \sqrt[3]{30{,}05} \approx 3{,}109;$$

$$\sqrt[27]{-\frac{q'''}{p'''}} \approx \sqrt[27]{\frac{15{,}012 \cdot 10^3}{p'''}} \approx \frac{\sqrt[9]{24{,}67}}{-3,109} \approx \frac{1{,}428}{-3{,}109} \approx -0{,}459;$$

$$\sqrt[27]{-\frac{r'''}{q'''}} \approx \sqrt[27]{\frac{(1/2)^{27}}{1{,}5012 \cdot 10^4}} \approx \frac{1}{2 \cdot 1{,}428} \approx 0{,}350,$$

és ezek különböző (valós) számok.

(2) bal oldalának értéke $x = 3{,}11$, $-0{,}46$ és $0{,}35$ helyettesítéssel 4 tizedesre kerekítve rendre $+0{,}0090$, $-0{,}0022$, $+0{,}0004$, így egyrészt $x_1 = 3{,}11$, $x_2 = -0{,}46$, $x_3 = 0{,}35$ jó közelítéssel (2) gyökeinek vehetők, másrészt utólag látjuk, hogy e gyökök teljesítik a tett korlátozásokat.

Ezek szerint a gyökök hatványozásának eljárása ebben a példában is használhatónak bizonyult, és itt is az abszolút értékek csökkenő rendjében kaptuk a gyökök közelítő értékét (7) egymás utáni szomszédos együttható-párjaiból.

Munk Sándor (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)
Bodor István (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)
Kocsis Ferenc (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)
dolgozataiból, kiegészítésekkel.

Megjegyzések. 1. Ismételten felhívjuk az olvasó figyelmét a megoldás szövegének óvatos megállapításaira, korlátozásaira. Ezeknek az a magyarázata, hogy ha a gyökök nem mind valósak, és ha nem mind különbözők – sőt még abszolút értékben is különbözőknek kell lenniük –, akkor a bemutatott eljárásban bonyodalmak jelentkeznek. Azt még látjuk, hogy ha (1)-nek egy gyöke többszörös gyök, pl. $x_1 = x_2$, akkor $x_1^3 = x_2^3$, tehát (6) megfelelő gyöke is többszörös gyök. Ebből sejtjük, hogy (6)-ban nincs idegen gyök. Az a kérdéses, hogy ilyen esetben a mondott hányadosok egyenlők-e (6) egy gyökének (-1)-szeresével.

2. Mint láttuk, (2)-nek nem gyöke $x = 0$, így oszthatjuk $x^3/2$-vel:

$$(1/x)^3 - (1/x)^2 - 6 \cdot (1/x) + 2 = 0,$$

ez pedig az 1420. feladatbeli $x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$ egyenlet reciprok egyenlete. Valóban, talált gyökeink rendre az ottani $0{,}322$, $-2{,}175$, $2{,}858$ gyök reciprokával egyenlők.

II. megoldás. *a feladat első részéhez.* Legyen (1) valamelyik gyöke x_0; ekkor teljesül:

$$x_0^3 + p x_0^2 + q x_0 + r = 0. \tag{8}$$

Az 1420. feladat első meggondolásának analógiájára válasszuk szét (8) tagjait aszerint, hogy bennük x kitevője osztható-e 3-mal, vagy nem:

$$x_0^3 + r = -p x_0^2 - q x_0, \tag{9}$$

és emeljük köbre ezt az alakot. Rendezés és kiemelés után a jobb oldal zárójele helyére (9) bal oldalát írva x_0 mindegyik kitevője osztható lesz 3-mal:

$$\begin{aligned} x_0^9 + 3r x_0^6 + 3r^2 x_0^3 + r^3 &= -p^3 x_0^6 - q^3 x_0^3 + 3pq x_0^3(-p x_0^2 - q x_0) = \\ &= -p^3 x_0^6 - q^3 x_0^3 + 3pq x_0^3 (x_0^3 + r), \end{aligned}$$

és újabb rendezéssel

$$(x_0^3)^3 + (p^3 - 3pq + 3r)(x_0^3)^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2) x_0^3 + r^3 = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet (1) minden gyökének köbe kielégíti.

Ezzel ismét (6)-ra jutottunk. Ez az eljárás azonban még nem biztosít arról, hogy amennyiben (1) egy gyöke többszörös gyök, akkor az új egyenlet nem tartalmaz idegen gyököt, más szóval arról, hogy az új egyenlet minden gyökének köbgyöke kielégíti-e (1)-et.

Zöldy Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)