I. Az adott kifejezés polinom-alakja 9-edfokú, állandó tagja nincs, mert $x=0$ helyettesítéssel értéke 0. A követelmény teljesüléséhez x, x^2 és x^3 együtthatójának 0-nak kell lennie, azaz

$$3A-1=0, \qquad 3A^2+3B=0, \qquad A^3+6AB+3C=0.$$

Az első egyenletből $A=1/3$, ezt a másodikba helyettesítve $B=-A^2=-1/9$, és mindkettőt a harmadikba beírva $C=5/81$. Viszont x^4 fellép, együtthatója 10/81. Ekkor az (1) polinom

$$D(x)=\frac{10}{81}x^4-\frac{2}{243}x^5-\frac{8}{2187}x^6+\frac{40}{6561}x^7-\frac{25}{19\,683}x^8+\frac{125}{531\,441}x^9.$$

II. $D(x)$-ben az együtthatók abszolút értékének összege $75\,968/531\,441<76/531$, így, ha pl. $|x|<1/2$, akkor $\left|D(x)\right|$-re felső becslést kapunk, minden tagot az abszolút értékével helyettesítve, majd $|x|$ fellépő hatványai helyébe a náluk nagyobb $(1/2)^4$-t írva. Eszerint, ha $|x|<1/2$, akkor

$$\left|D(x)\right|<\frac{76}{531\cdot 2^4}<\frac{5}{531}<\frac{1}{100}.$$

Így kis abszolút értékű x-ekre várhatóan jól használható a következő közelítő egyenlőség:

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3. \tag{2}$$

Kecskeméty Károly (Budapest, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. (2) bal oldalát A-val, jobb oldalát B-vel jelölve

$$B^3-A^3=\delta(x), \qquad \text{ahol} \qquad \left|\delta(x)\right|<\frac{x^4}{4},$$

így ha $|x|<1/2$, akkor $B>0$, $A>1/2$ és

$$|A-B|=\frac{|A^3-B^3|}{A^2+AB+B^2}<\frac{\left|\delta(x)\right|}{A^2}<4\left|\delta(x)\right|<x^4.$$

2. $x=0{,}3$, $-0{,}3$, $0{,}9$ és $-0{,}9$ esetén (2) az 1,3, 0,7, 1,9, 0,1 szám köbgyökére rendre az

$$1{,}0917, \qquad 0{,}8883, \qquad 1{,}255, \qquad 0{,}565$$

közelítő értéket adja, a táblázatból vett

$$1{,}092, \qquad 0{,}8879, \qquad 1{,}238, \qquad 0{,}465$$

értékkel szemben. Az utóbbi két példa (kívül az $|x|<1/2$ intervallumon) már nagyobb eltérést mutat.

Hunyadvári László (Budapest, Könyves Kálmán g. IV. o. t.)