I. Az u, v ismeretlen-párra nézve az egyenletrendszer elsőfokú, először ezeket fejezzük ki a p, q paraméter-párral. Feltesszük, hogy

$$p \neq 0, \qquad q \neq 0, \qquad p-q \neq 0 \quad \text{és} \quad p+q \neq 0, \tag{3}$$

azaz $|p| \neq |q|$, különben (2)-nek nincs értelme.

Osszuk (1)-et $p+q$-val, szorozzuk (2)-t p-vel, adjuk össze a kapott egyenleteket, majd képezzük a bal és jobb oldal különbségét:

$$v\left(\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p-q}\right)=2(p-q)+\frac{p^2+q^2}{q},$$

$$\frac{v(p^2+2pq-q^2)}{p^2-q^2}=\frac{p^2+2pq-q^2}{q}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{v}{p^2-q^2}-\frac{1}{q}\right)(p^2-2pq-q^2)=0. \tag{5}$$

Ez az egyenlet – pl. az (1)-gyel összekapcsolva – az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert alkot.

Ha mármost

$$p^2+2pq-q^2 \neq 0, \tag{6}$$

akkor (5)-ből

$$v=\frac{p^2-q^2}{q}, \tag{7}$$

folytatólag (1)-ből

$$u=\frac{p^2-q^2}{p} \tag{8}$$

és (8), (7) a rendszer egyetlen megoldása.

Ha viszont a paraméterekre teljesül

$$p^2+2pq-q^2=0, \tag{9}$$

akkor (2) következménye az (1)-nek, hiszen (4) mindkét oldala 0, ezért minden az (1)-et kielégítő u, v értékpárra (2) is teljesül, végtelen sok megoldás van. Tetszés szerinti v-t választva a megoldás:

$$u=\frac{1}{p}\left[2(p^2-q^2)-qv\right], \qquad v. \tag{10}$$

(9) akkor teljesül, ha a paraméterek aránya

$$q/p=1+\sqrt{2}, \qquad \text{vagy ha} \qquad q/p=1-\sqrt{2}, \tag{11}$$

ilyen esetben (3) is teljesül.

II. p-t és q-t tekintve ismeretleneknek, ismét föltesszük (3)-at, vagyis kizárunk minden olyan u, v paraméter-párt, amely a (3)-at nem teljesítő p, q értékpárra vezet. Az (1), (5) rendszer a (3) feltétel mellett a p, q ismeretlenekre is ekvivalens az (1), (2) rendszerrel. (5) teljesül, ha (7) és (9) közül legalább az egyik teljesül. (7)-ből és (1)-ből kaptuk (8)-at, ezek szerint

$$p^2-q^2=vq=up, \qquad \text{ezért} \qquad q=\frac{u}{v}\cdot p,$$

ezt beírva (8)-ba, majd onnét p kifejezését ide visszahelyettesítve

$$u=p-\frac{q^2}{p}=p\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)=p\frac{v^2-u^2}{v^2},$$

$$p=\frac{uv^2}{v^2-u^2}\,, \qquad q=\frac{u^2v}{v^2-u^2}. \tag{12}$$

Ez megoldása a rendszernek, hacsak teljesül rá (3), azaz ha $u \neq 0$, $v \neq 0$ és $|u| \neq |v|$.

(9) teljesülése meghatározza az ismeretlenek (11) arányát, onnét q-t (1)-be helyettesítve, majd az adódó másodfokú egyenlet $p=0$ gyökét mindjárt figyelmen kívül hagyva:

$$up+v(1\pm\sqrt{2})p=-4p^2(1\pm\sqrt{2}),$$

$$p=\frac{u+(1\pm\sqrt{2})v}{-4(1\pm\sqrt{2})}=\frac{1}{4}\left[(1\mp\sqrt{2})u-v\right], \tag{13}$$

végül (11) alapján

$$q=\frac{1}{4}\big[-u-(1\pm\sqrt{2})v\big]. \tag{14}$$

Ez megoldása a rendszernek, ha teljesül rá (3). A kizárt $p=0$, $q=0$, $p-q=0$, $p+q=0$ esetek mindegyike erre vezet: $v\neq u(1\mp\sqrt{2})$. (Ez azt jelenti, hogy $u=v=0$ is ki van zárva.)

III. Összefoglalva, adott p, q értékpár esetén egyértelműen

$$u=\frac{p^2-q^2}{p},\qquad v=\frac{p^2-q^2}{q},\quad \text{ha}\quad pq(p^2-q^2)\neq 0\quad \text{és}\quad q\neq(1\pm\sqrt{2})p.$$

Ha pedig $q=(1\pm\sqrt{2})p$ és $pq(p^2-q^2)\neq 0$, akkor tetszés szerinti

$$u=\frac{1}{p}\big[2(p^2-q^2)-qv\big],\quad v$$

kielégíti a rendszert, végtelen sok megoldás van.

Másrészt, adott u, v értékpár esetén egyértelműen

$$p=\frac{uv^2}{v^2-u^2},\qquad q=\frac{u^2v}{v^2-u^2},\quad \text{ha}\quad uv(u^2-v^2)\neq 0,$$

továbbá

$$p=\frac{1}{4}\big[(1\mp\sqrt{2})u-v\big],\qquad q=\frac{1}{4}\big[-u-(1\pm\sqrt{2})v\big]$$

ha $v\neq u(1\mp\sqrt{2})$. Vagyis általában 3 megoldás van; ha azonban v/u értéke ±1, vagy $1\mp\sqrt{2}$, akkor 2 megoldás van, föltéve, hogy $uv\neq 0$. Ha u, v egyike, pl. $u=0$, akkor

$$p=-\frac{v}{4},\qquad q=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}v$$

alakban ugyancsak 2 megoldást kapunk. $u=v=0$ esetén nincs megoldása a rendszernek.

Fiala Tibor (Budapest, II. Rákóczi F. g. II. o. t.)
Szabados Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A p, q ismeretlen-párra az alábbiak szerint is megoldhatjuk a rendszert. (2)-ből, (1) figyelembevételével

$$\frac{(p+q)v-(p-q)u}{p^2-q^2}=\frac{2(p+q)v-2(p-q)u}{pu+qv}=\frac{p^2+q^2}{pq},$$

beszorozva, 0-ra redukálva, alkalmas kiemelésekkel, végül gyöktényezőkre bontással (felhasználva (11)-et)

$$2pq(qv-pu)+(p^2-q^2)(qv-pu)=0,$$
$$(p^2+2pq-q^2)(qv-pu)=0,$$
$$\big[q-(1+\sqrt{2})p\big]\big[q-(1-\sqrt{2})p\big](qv-pu)=0. \tag{15}$$

Az egymás utáni tényezőket 0-val egyenlővé téve q-t kifejezhetjük p-vel, így p-t kiszámíthatjuk (1)-ből.

$q=(1\pm\sqrt{2})p$ esetén, a $p=0$ gyököt mindjárt figyelmen kívül hagyva

$$p=\frac{u+(1\pm\sqrt{2})v}{-4(1\pm\sqrt{2})}=\frac{1}{4}\big[(1\mp\sqrt{2})u-v\big],$$

$q=pu/v$ esetén pedig hasonlóan (12)-t kapjuk.

(15) harmadik tényezőjében (3) miatt nem lehet $u/v=\pm1$, ha pedig $u/v=1\pm\sqrt{2}$, akkor a harmadik tényező azonos az első kettő valamelyikével, innen nem kapunk újabb megoldást.