Legyen az a_n sorozat különbsége d, a g_n sorozat hányadosa q, így a követelmények:

$$1+2d=q^2\neq 1,\qquad (1+20d)^5=q^{20}.$$

A második egyenletből 5-ik gyököt vonva, majd felhasználva az elsőt:

$$1+20d=q^4=(q^2)^2=(1+2d)^2=1+4d+4d^2$$

(csak a valós gyököt vettük figyelembe), és innét

$$d=4,\qquad q=\pm 3.$$

(A $d=0$ gyök a kizárt $g_3=q^2=1$ értékre vezet.) Valóban, így $a_3=g_3=9$, $a_{21}=81=(\pm 3)^4$, és $a_{21}^5=(\pm 3)^{20}=g_{21}$, mindkét mértani sorozatban.

Az a_n sorozat minden tagja pozitív, a $g_n=3^{n-1}$ és $g_n'=(-3)^{n-1}$ sorozatok pozitív tagjai pedig közösek, ezért elég a_n-nel és g_n-nel foglalkoznunk.

Csak páratlan indexű tagokra állhat fenn a kívánt egyenlőség, ugyanis ha $n=2r$, akkor

$$g_{2r}=3^{2r-1}=3+3\cdot(3^{2(r-1)}-1)=3+3\cdot(3^{r-1}-1)(3^{r-1}+1).$$

Itt a két zárójeles kifejezés páros, s így g_{2r} 4-gyel osztva 3-at ad maradékul, a_{2r} viszont 1-et s így minden hatványa is.

Legyen a továbbiakban $n=2r+1$ (r és minden további betű is pozitív egész számot jelöl). Olyan r-et és k-t kell keresnünk, amelyre

$$(1+8r)^k=3^{2r}=9^r. \tag{1}$$

Ehhez a bal oldali alapnak 3 hatványának kell lennie, és láttuk, hogy ekkor csak páros hatványa lehet

$$1+8r=3^{2s}=9^s,$$

továbbá ezt (1)-be beírva, $ks=r$-nek kell teljesülnie. Olyan s értéket keresünk tehát, amelyre

$$1+8ks=9^s,$$

vagyis amelyre 9^s-1 osztható $8s$-sel. Ha ez fennáll, akkor $k=(9^s-1)/8s$, $n=2r+1=2ks+1=(9^s+3)/4$ értékekre $a_n^k=[1+4(n-1)]^k=9^{ks}=3^{n-1}=g_n$.

$s=1$ és 2-re fennáll az oszthatóság és éppen a feladat szövegében említett $n=3$ és 21 eseteket kapjuk. Világos, hogy $s=3$ és semmilyen 3-mal osztható s érték nem felel meg, mert 9^s-1 nem osztható 3-mal.

$s=4$ ismét megfelel, mert

$$9^4-1=(9-1)(9+1)(9^2+1)$$

osztható 32-vel. Ekkor $k=(9^4-1)/32=5\cdot 41=205$, $n=2\cdot 205\cdot 4+1=1641$.

Ugyancsak megfelel $s=8$ is, mert

$$9^8-1=(9^4-1)(9^4+1),$$

és itt az utolsó tényező páros, tehát a szorzat osztható $32\cdot 2=4\cdot 16$-tal. Így

$$k=\frac{9^8-1}{64}=\frac{9^4-1}{32}\cdot\frac{9^4+1}{32}=205\cdot 3281=672\,605,$$
$$n=672\,605\cdot 16+1=10\,761\,681$$

is kielégíti a feladat feltételeit.

Sergyán Stefánia (Zalaegerszeg, Csányi L. közg. t. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fentiek mintájára adódik, hogy minden megfelelő s értéknek a kétszerese is megfelelő, hiszen ha 9^s-1 osztható $8s$-sel, akkor $9^{2s}-1=(9^s-1)(9^s+1)$ osztható $8\cdot 2s$-sel, mert 9^s+1 páros. Így s lehet 2-nek bármelyik hatványa, tehát végtelen sok megoldás van.

Bodor István (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)

2. Tévesen állították többen, hogy ez az összes megoldás, hiszen pl. $9^{10}-1$ osztható $9^2-1=8\cdot 10$-zel, tehát $s=10$ is megoldáshoz vezet ($k=43\,584\,805$, $n=871\,696\,101$).

Barcza Gyöngyi (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

3. Ezzel együtt minden megfelelő *páros* s érték 5-szöröse is megfelelő, mert

$$9^{5s}-1=(9^s-1)(9^{4s}+9^{3s}+9^{2s}+9^s+1),$$

és a második zárójelben minden tag utolsó jegye 1, tehát az összegé 5 (mert s páros), az első tényező pedig feltétel szerint osztható $8s$-sel.

Megadható számos további megfelelő s értéksorozat is.