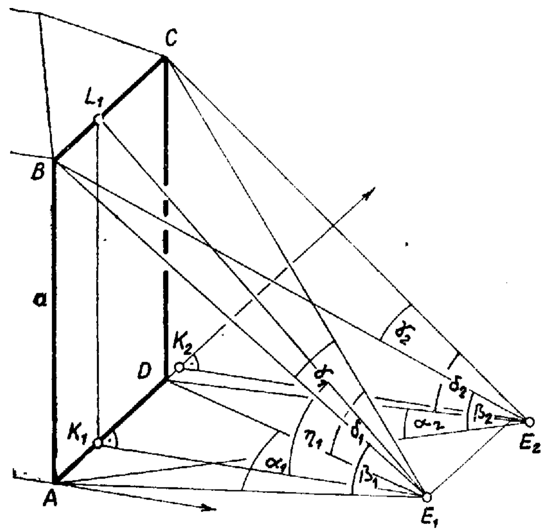
Megoldás. I. Legyen a falsík alapéle $AD = a$, függőleges élei AB, DC, az észlelési helyek E_i – ahol $i = 1{,}2$ –, innen AD, BC látószöge α_i, ill. γ_i.



Mivel E_i az alapél síkjában van, E_iBA és E_iCD derékszögű háromszög, továbbá $AB = DC = a$, ezért

$$AE_i = a\operatorname{cotg}\beta_i, \quad DE_i = a\operatorname{cotg}\delta_i; \quad BE_i = \frac{a}{\sin\beta_i}, \quad CE_i = \frac{a}{\sin\delta_i}.$$

(Egyszerűség kedvéért az i indexet egyelőre nem írjuk ki.) Az ADE, ill. BCE háromszögből a koszinusz–tétellel

$$\cos\alpha = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2\cdot AE\cdot DE} = \frac{\operatorname{cotg}^2\beta + \operatorname{cotg}^2\delta - 1}{2\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\delta}, \tag{1}$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\sin^2\delta} - 1}{\dfrac{2}{\sin\beta\sin\delta}} = \frac{\sin^2\beta + \sin^2\delta - \sin^2\beta\sin^2\delta}{2\sin\beta\sin\delta}. \tag{2}$$

II. Legyen az AD egyenesnek E_i-hez legközelebbi pontja K_i, BC-é pedig L_i. Ezeket az E-n átmenő és az élre merőleges sík metszi ki, $AD \parallel BC$ miatt mindkettőt ugyanaz a függőleges sík, így elég K-t meghatároznunk. A függvény értelme és a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} AK = AE\cdot\cos EAD\sphericalangle &= \frac{AE^2 + AD^2 - ED^2}{2AD} = \\ &= \frac{\alpha}{2}(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\delta + 1), \end{aligned} \tag{3}$$

másrészt az ADE háromszög t területe két kifejezésének egyenlőségéből

$$KE = \frac{2t}{AD} = \frac{EA\cdot ED\sin\alpha}{AD} = a\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\delta\sin\alpha. \tag{4}$$

Így KL-nek η látószögére

$$\operatorname{cotg}\eta = \frac{EK}{KL} = \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\delta\sin\alpha. \tag{5}$$

(3) és (5) azonban csak akkor ad választ a feladat kérdésére, ha K az AD élszakaszon adódik: $0 \leqq AK \leqq AD$. Különben, $AK < 0$ esetén A, $AK > AD$ esetén pedig D az AD élszakasznak E-hez legközelebbi pontja, a BC élszakaszon megfelelően B, ill. C, végül az emelkedési szög β, ill. δ.

III. AK_i, K_iE_i az észlelési pont koordinátái abban a derékszögű koordináta–rendszerben, melynek origója A, abszcisszatengelyének pozitív fele az AD félegyenes és az ordináták az E_i-t tartalmazó félsíkon pozitívok. Így az E_1E_2 távolság a koordináta–geometria távolságképletével állapítható meg.

IV. A numerikus adatokkal az E_1 észlelőhelyre $\alpha_1 = 47{,}6°$, $\gamma_1 = 36{,}6°$, $AK_1 = 7{,}83$ m, $K_1E_1 = 22{,}52$ m, $\eta_1 = 41{,}6°$; az E_2 észlelőhelyre $\alpha_2 = 38{,}6°$, $\gamma_2 = 32{,}0°$, $AK_2 = 21{,}39$ m ($> AD$), $K_2E_2 = 23{,}80$ m, a felső él E_2-höz legközelebbi pontja C, emelkedési szöge $40°$. Végül a koordinátákból $E_1E_2 = 13{,}62$ m.

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az E_1E_2 távolság az AE_1E_2 (vagy DE_1E_2) háromszögből is számítható, az E_iAD (ill. E_iDA) szögek előzetes kiszámítása alapján.