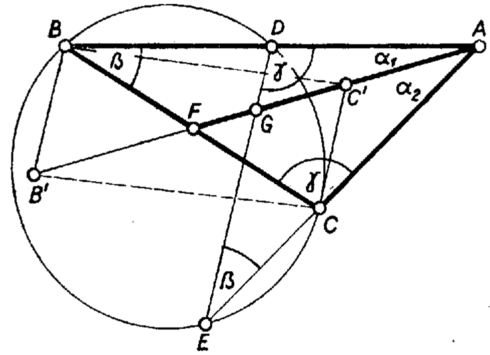
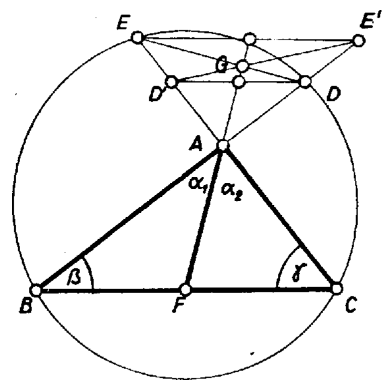
I. megoldás. Az ábra háromszögeiben szereplő közös, ill. egyenlő oldalak és közös, ill. egyenlő szögek reményt nyújtanak arra, hogy az összefüggésekben felhasznált fölösleges alkotórészek kiküszöbölésével célhoz érünk. – Az állítás értelmét veszti, ha a kör átmegy A-n, ezért ezt az esetet kizárjuk. Ekkor A, D, E különböző pontok és az ADE háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők, hiszen az AB, AC egyenespár a körnek két szelője. Legyen $ABC\sphericalangle = AED\sphericalangle = \beta$, $ACB\sphericalangle = ADE\sphericalangle = \gamma$, továbbá $FAB\sphericalangle = \alpha_1$, $FAC\sphericalangle = \alpha_2$, az utóbbiak rendre azonosak vagy csúcsszögek a GAB, ill. GAC szöggel aszerint, hogy A a körre nézve külső, ill. belső pont.



1. ábra



2. ábra

Fejezzük ki GD-t, GE-t a színusz–tétel alapján az AGD, ill. AGE háromszögből és alakítsuk arányukat az alábbiak szerint:

$$GD : GE = \frac{GA\sin\alpha_1}{\sin\gamma} : \frac{GA\sin\alpha_2}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} : \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{AC}{AB} : \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}. \tag{2}$$

(Az arány tagjait szoroztuk $\sin\beta / GA\sin\alpha_1$-gyel, majd a színusz tételt alkalmaztuk az ABC háromszögre.) Hasonlóan az AFB és AFC, majd ismét az ABC háromszög alapján

$$FB : FC = \frac{FA\sin\alpha_1}{\sin\beta} : \frac{FA\sin\alpha_2}{\sin\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} : \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{AB}{AC} : \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}.$$

Mivel pedig $FB = FC$, azért

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Ezt (2) utolsó arányába helyettesítve és az arány tagjait egyaránt $AB \cdot AC$-vel szorozva az (1) állítást kapjuk.

Bizonyításunk akkor is érvényes, ha a kör érinti pl. az AB egyenest, és így D helyén is B értendő, sőt akkor is, ha ugyanígy még E is egybeesik C-vel. Az utóbbi esetben azonban az állítás nyilvánvaló, mert az ABC háromszög egyenlő szárú, másrészt G azonos F-fel.

Horváth Sándor (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost DE-vel B-n és C-n át, és messék ezek AF-et a B', ill. C' pontban. Ekkor a GDA, $B'BA$, a GEA, $C'CA$, valamint az ADE, ACB hasonló háromszög–párokból

$$GD : GE = \frac{AD}{AB}\cdot BB' : \frac{AE}{AC}\cdot CC' = \frac{AD}{AE} : \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB} : \frac{AB}{AC} = AC^2 : AB^2,$$

ugyanis $BB'CC'$ paralelogramma, és így $BB' = CC'$.

Fischer Ágnes (Budapest, Móricz Zs. g. I. o. t.)

III. megoldás. Húzzunk párhuzamost BC-vel D-n és E-n át, és messe ez AC-t D'-ben, ill. AB-t E'-ben. Ekkor AF nyilvánvalóan felezi DD'-t és EE'-t, a $DD'EE'$ trapéz két párhuzamos oldalát, ezért átmegy az átlók metszéspontján is. A DE átló G-ben metszi AF-et, így G-n átmegy $D'E'$ is. Hasonló háromszögekből

$$\frac{GD}{GE} = \frac{DD'}{EE'} = \frac{AD'}{AE}.$$

Az ADE, ACB és $AD'D$ háromszögek hasonlók, ebből

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}, \qquad \frac{AD'}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

és ezek összeszorzásával

$$\frac{GD}{GE} = \frac{AD'}{AE} = \frac{AC^2}{AB^2}.$$

Göndőcs Ferenc (Kapuvár, II. sz. Ált. Isk., 8. o.t.)