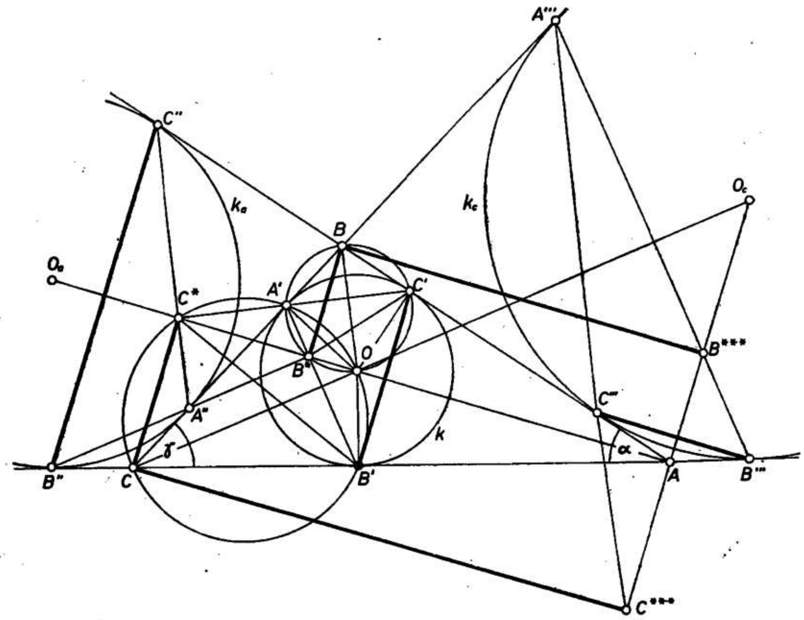
a) A szögfelező átmegy a beírt kör O középpontján és merőleges $B'C'$-re ezért elég azt belátnunk, hogy BB^* is, CC^* is merőleges AO-ra.

Ha A' rajta van AO-n, akkor a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$, AO a szimmetriatengely, és B^*, C^* azonos A'-vel, BB^* és CC^* azonos a BC egyenessel.

$AB \neq AC$ esetén válasszuk a betűzést úgy, hogy $AB < AC$ legyen, ekkor A' az AO-nak C'-t tartalmazó partján van, ezért C^* a háromszögön kívül adódik, B^* viszont a belsejében.



Az OB^* szakaszt A'-ből és C'-ből egyenlő szögben látjuk, ugyanis a szimmetria és az $OA'B'$ háromszög egyenlő szárú volta miatt

$$OC'B^*\sphericalangle = OB'B^*\sphericalangle = OA'B^*\sphericalangle,$$

eszerint A', C', O és B^* egy kör pontjai. Másrészt az első három ponton átmenő, egyértelműen meghatározott kör átmegy B-n is, mert $OA'B$ és $OC'B$ derékszögek, s így az $OA'BC'$ deltoid húrnégyszög, és e körben OB átmérő. Ezért a $BB^*O\sphericalangle$ derékszög, s ezt akartuk bizonyítani.

A $CC^*O\sphericalangle$ derékszög voltát lényegében ugyanígy bizonyítjuk, de figyelembe véve, hogy AO, azaz OC^* szétválasztja A'-t és B'-t. Az $OA'C^*B'$ négyszög A'-nél levő külső szögére:

$$OA'C'\sphericalangle = OC'A'\sphericalangle = OC'C^*\sphericalangle = OB'C^*\sphericalangle,$$

tehát a négyszög húrnégyszög, másrészt körülírt köre O, A', B' miatt átmegy C-n, ezért $CC^*O\sphericalangle = CA'O\sphericalangle$, derékszög.

b) Tekintsük az ABC háromszögnek azt a k_a külső érintő körét, amely a BC oldalt a háromszöget nem tartalmazó partján, az A'' pontban érinti, középpontja legyen O_a. Legyen az AC, AB félegyenesen levő érintési pontja B'', C'' és messe az AO_a egyenest $A''B''$ a B^{**} pontban, $A''C''$ a C^{**}-ban. Érvényes a feladat állításának megfelelője: $B''C'' \parallel BB^{**} \parallel CC^{**}$, és ez a fentiekhez hasonlóan bizonyítható. S mivel eszerint pl. B^{**} is, B^* is a B csúcs vetülete az A-ból induló belső szögfelezőn, e két pont azonos. (Az is fennáll, hogy B^*-ban $A'B'$ és $A''B''$ merőlegesen metszi egymást, hiszen merőlegesek a C-beli belső, ill. külső szögfelezőre.)

c) Legyen végül az AB oldalt kívülről érintő k_c, kör középpontja O_c, érintési pontja a BC, CA, AB egyenesen rendre A''', B''', C''', továbbá $A'''B'''$-nek és $A'''C'''$-nek az AO_c külső szögfelezőn levő metszéspontja B^{***}, ill.C^{***}, ekkor hasonlóan bizonyítható, hogy $B'''C''' \parallel BB^{***} \parallel CC^{***}$.

Szenes Katalin (Budapest, I. István Gimnázium)
Takács László (Sopron, Széchenyi I. Gimnázium)

Megjegyzés. Az állítás háromszögek hasonlósága alapján is bizonyítható, ezt B^*-ra vonatkozóan vázoljuk, a szokásos jelöléseket használjuk. $CA'B'$ egyenlő szárú háromszög, ezért $AB'B^*\sphericalangle = 90^\circ + \gamma/2$, $B'AB^*\sphericalangle = \alpha/2$, így $AB^*B'\sphericalangle = \beta/2 = ABO\sphericalangle$, tehát $AB^*B'\ \triangle \sim ABO\ \triangle$. Innen

$$\frac{AB^*}{AB} = \frac{AB'}{AO},$$

emiatt az A-nál egyenlő szöggel bíró AB^*B és $AB'O$ háromszögek is hasonlók, az utóbbiban B'-nél derékszög van, tehát az $AB^*B\sphericalangle$ is derékszög.