I. Az egységkörbe írt szabályos 11-szög oldala $2\sin\pi/11$. A feladat azt állítja, hogy az (1) kifejezés közelítő értéke ennek, továbbá, hogy még közelebb áll ahhoz az értékhez, amit a húr hosszára kapunk, ha középponti szögként $2\pi/11$-nek 0,5 szögmásodperccel megnövelt vagy csökkentett értékét vesszük, vagyis az oldal képletében $\pi/11$-et a $0{,}25''$-cel nagyobb vagy kisebb szöggel pótoljuk. 0,25 szögmásodperc a 180°-nál $180\cdot 60\cdot 60\cdot 4\approx 2{,}6\cdot 10^6$-szor kisebb, így ívmértéke közelítőleg $1{,}2\cdot 10^{-6}$. (2) alapján várható, hogy a megváltoztatott szög színusza is ilyen nagyságrendű értékkel tér el $\sin\pi/11$-től, ezért elég lesz $\pi/11$ és megváltoztatandó értéke színuszát 7 tizedes számjegyre meghatároznunk. Azt, hogy $\pi/11$-et növelnünk vagy csökkentenünk kell-e $0{,}25''$-cel, abból fogjuk látni, hogy $\sin\pi/11$ kisebbnek, ill. nagyobbnak adódott-e (1)-nél. (1) és (2) egyes tagjait pedig 8 tizedesre fogjuk számítani. A pozitív tagokat mindig lekerekítjük, a negatívok abszolút értékét fölfelé, így alsó közelítő értékét kapjuk a számítandó kifejezéseknek.

A kérdéses h húr számítása (1)-ből

$$\begin{aligned} 1/3 &= 0{,}333\,333\,33\\ 1/5 &= 0{,}2\\ 1/51 &= 0{,}019\,607\,84\\ 1/95 &= \underline{0{,}010\,526\,31}\\ & \,0{,}563\,467\,48 \quad \text{tehát} \end{aligned}$$

$$0{,}281\,733\,74 < h/2 < 0{,}281\,733\,76. \tag{3}$$

(2)-ben először $x=\pi/11=0{,}285\,599\,33$ és $x^2=\pi^2/121=0{,}081\,566\,97$; az egymás utáni tagok számlálóját az utóbbival való szorzás útján kapjuk, a nevező pedig rendre $2\cdot 3=6$-szor, $4\cdot 5=20$-szor, $6\cdot 7=42$-szer ... nagyobb az előző nevezőnél. Eszerint a másodiktól kezdve minden tag abszolút értéke az előző tag abszolút értékének legfeljebb $x^2/6\approx 0{,}0136$ része, azaz kisebb, mint annak 1/70 része. A váltakozó előjelekre is tekintve mondhatjuk, hogy a számításban (2) valamely tagja után megállva, azaz elhagyva az összes további tagokat, az elkövetett hiba abszolút értéke kisebb, mint az utolsó megtartott tag 1/70 része és a hiba e taggal ellentett irányú. Egyszerű becslés szerint az $x^7/7!$ tag még nagyobb, az $x^9/9!$ tag viszont már kisebb a megtartandó utolsó számjegy helyi értékénél, $1\cdot 10^{-8}$-nál, tehát 4 tagot kell kiszámítanunk. Ezek:

		változása
x	$0{,}285\,599\,33$	$0{,}000\,001\,21$
$-x^3/6$	$-0{,}003\,882\,58$	$-0{,}000\,000\,06$
$+x^5/120$	$+0{,}000\,015\,83$	0
$-x^7/7!$	$-0{,}000\,000\,04$	0
	$0{,}281\,732\,54$	$0{,}000\,001\,15$

A figyelmen kívül hagyott tagok összege – a fentinél valamivel finomabb becsléssel – kisebb, mint $x^9/9! < 4\cdot 10^{-8}\cdot x^2/8\cdot 9 < 4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}09/8\cdot 9 = 5\cdot 10^{-11}$, lefelé kerekítjük, mert az $x^9/9!$ tag pozitív lenne, 0-t írunk helyette. Itt és minden egyes kiszámított tag kerekítésénél legföljebb $1\cdot 10^{-8}$ hibát követtünk el, így

$$0{,}281\,732\,54 < \sin\pi/11 < 0{,}281\,732\,59,$$

a hetedik tizedesjegy 5 vagy 6.

Ezt (3)-hoz hasonlítva látjuk, hogy (1) a beírt szabályos 11-szög oldalának felső közelítő értéke, ezért tervezett második számításunkban x-et növelnünk kell $\varepsilon=\pi/(180\cdot 60\cdot 60\cdot 4)\approx 121\cdot 10^{-8}$-nal (lekerekítve).

A viszonylag csekély eltérésre tekintettel e számításban felhasználjuk a fenti számítást. Elég a 4 tag egyenkénti növekedését megállapítanunk. A második tagtól kezdve csak azt állapítjuk meg, hányszor akkora az új tag, mint a megfelelője, ugyanis a növelés kisebb, mint a fenti x-nek $5\cdot 10^{-7}$ része.
Pontosabban

$$42\cdot 10^{-7} < \frac{121\cdot 10^{-8}}{0,282} < \frac{\varepsilon}{x} < \frac{122\cdot 10^{-8}}{0{,}281} < 44\cdot 10^{-7}.$$

Így az új második tag nem lehet több, mint az előbbinek $1{,}000\,004\,4^3$-szöröse, az új 3. tag pedig legalább annyi, mint az előbbinek $1{,}000\,004\,2^5$-szerese. E szorzók egy felső, ill. alsó közelítő értéke:

$$\begin{gathered} (1+44\cdot 10^{-7})^3 = 1+3\cdot 44\cdot 10^{-7}+3\cdot 44^2\cdot 10^{-14}+44^3\cdot 10^{-21} < \\ < 1+132\cdot 10^{-7}+1\cdot 10^{-10}+1\cdot 10^{-16} < 1+133\cdot 10^{-7} \\ (1+42\cdot 10^{-7})^5 > 1+5\cdot 42\cdot 10^{-7} = 1+210\cdot 10^{-7}. \end{gathered}$$

A fenti 2. tag $133\cdot 10^{-7}$-szerese, 8 tizedesre fölkerekítve a tag mellett látható, a 3. tag $210\cdot 70^{-7}$-szerese lefelé kerekítve 0, hasonlóan a 4. tag sem változik. A kerekítés hibája ismét minden tagban legföljebb $1\cdot 10^{-8}$, így

$$0{,}281\,733\,69 < \sin(\varepsilon+\pi/11) < 0{,}281\,733\,78,$$

a hetedik tizedesjegy 7 vagy 8. Ennyi a 0,5″-cel növelt középponti szöghöz tartozó húr hosszának fele.

Ezt (3)-mal összehasonlítva, az állítás elfogadható, az eltérés valamivel nagyobb is lehet 0,5″-nél, mindenesetre közel áll hozzá.

II. Kissé másképpen, nem sokkal több munkával számíthatjuk $\sin(\varepsilon+\pi/11)$ értékét az addíció-tétel alapján, ha (2) alapján kiszámítjuk $\sin\varepsilon$, valamint a függvénytáblázatban található

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{4}$$

kifejezés alapján $\cos\pi/11$ és $\cos\varepsilon$ értékét is. 8 tizedesre kerekítve $\sin\varepsilon = 0{,}000\,001\,21$; $\cos\varepsilon = 1{,}000\,000\,00$; 5 tizedesre

$$0{,}959\,49 < \cos\pi/11 < 0{,}959\,50,$$

így $\sin(\varepsilon+\pi/11)$ második tagja $\sin\pi/11$, első tagja pedig $\sin\varepsilon\cos\pi/11 = 116\cdot 10^{-8}$, vagyis az $1\cdot 10^{-8}$ eltérésre nem tekintve egyenlő a fenti növekedéssel.

A h húrhoz tartozó 2φ középponti szögnek és $2\pi/11$-nek eltérését meghatározhatnók valamely elég nagy többszörösük eltéréséből is, ebben ugyanis a hiba is ugyanannyiszorosára nő. Elvileg egyszerű 11-szeresük szinuszát tekinteni, hiszen ekkor $\sin 22\varphi$-t hasonlítjuk 0-hoz; számítani viszont elég lenne 11/2-szeresüket, azaz a $\sin 11\varphi - 0$ különbséget. Pl. a

$$\begin{gathered}
\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = \sin\varphi(3-4\sin^2\varphi) = \sin\varphi(4\cos^2\varphi - 1),\\
\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos\varphi(4\cos^2\varphi - 3),\\
\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi, \quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1
\end{gathered}$$

azonosságok alapján

$$\begin{gathered}
\sin 11\varphi = \sin(9\varphi + 2\varphi) = \ldots = \sin\varphi(1024\cos^{10}\varphi -\\
-2304\cos^8\varphi + 1792\cos^6\varphi - 560\cos^4\varphi + 60\cos^2\varphi - 1),
\end{gathered}$$

ahol az (1) kifejezésből, közös nevezőre hozással és felezéssel

$$\sin\varphi = \frac{91}{323}, \qquad \cos^2\varphi = 1 - \frac{91^2}{323^2} = \frac{414\cdot 232}{323^2}$$

(azaz $\sin 11\varphi$ racionális szám).

Csörgei József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)
Draschitz Rudolf (Budapest, Landler J. Gépip. és Híradásip. Techn. III. o. t.)
Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Magát a h húrhoz tartozó középponti szöget – azaz először a felét – számíthatjuk ki a (2)-höz és (4)-hez hasonló

$$\operatorname{arc}\,\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots$$

hatványsor alapján az $x = h/2 = 91/323$ értékből:

$$\operatorname{arc}\,\sin 91/323 = 0{,}285\,600\,57.$$

Ennek többlete $\pi/11$ fenti értékéhez képest $124\cdot 10^{-8} \approx 0{,}254''$. Itt azonban 6 tagra volt szükség, és az elhagyott további tagok összegének becslése nehezebb amiatt, mert minden tag pozitív.

Dombi József (Szeged, Ságvári E. gyak. g. IV. o. t.)