(2) bal és jobb oldala különbségének, valamint a (3) és (4) két oldalán álló különbségeknek közös alakja

$$f(u) - f(v) = \frac{pu+q}{ru+s} - \frac{pv+q}{rv+s} = \frac{(rq-ps)(v-u)}{(ru+s)(rv+s)} = \frac{(rq-ps)(v-u)}{r^2\left(u+\dfrac{s}{r}\right)\left(v+\dfrac{s}{r}\right)} \tag{5}$$

(ugyanis I.-nek és II.-nek csak $r \neq 0$ esetén van értelme).

(I) nevezője

$$rx + s = r\left(x + \frac{s}{r}\right),$$

zárójelbeli tényezője az I.-ben és II. -ben szereplő $-s/r$ helyen eltűnik, előtte negatív, utána pozitív. S mivel $i = 1,\ 2$ értéke mellett

az I. esetben $x_i - \varepsilon < x_i < -s/r$, a II. esetben $-s/r < x_i < x_i + \varepsilon$,

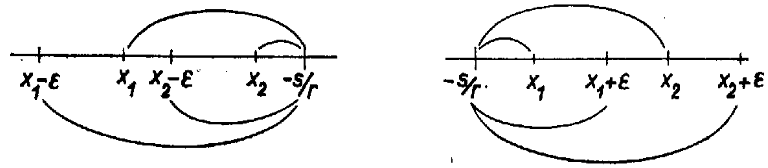
azért (5) nevezőjében a két zárójelbeli tényező mindegyik u, v számpárunk esetében egyenlő előjelű, tehát szorzatuk mindig pozitív. Ugyanez áll (5) számlálójára is – ennélfogva (5) mindig pozitív –, ugyanis a feltevés folytán $rq - ps > 0$, továbbá mindig $v - u > 0$, hiszen (2) esetében $u = x_1$, $v = x_2$, és mindig áll $x_2 - x_1 > 0$, (3) és (4) esetében pedig mindig $v - u = \varepsilon$. – Ezzel (2)-t máris bebizonyítottuk.

(3) és (4) bizonyításához – mivel két oldaluk (5) szerinti átalakításában a számláló közös és pozitív – csak a nevezők változó része közti

$$\left(x_1 - \varepsilon + \frac{s}{r}\right)\left(x_1 + \frac{s}{r}\right) > \left(x_2 - \varepsilon + \frac{s}{r}\right)\left(x_2 + \frac{s}{r}\right), \tag{3a}$$

$$\left(x_1 + \frac{s}{r}\right)\left(x_1 + \varepsilon + \frac{s}{r}\right) < \left(x_2 + \frac{s}{r}\right)\left(x_2 + \varepsilon + \frac{s}{r}\right) \tag{4a}$$

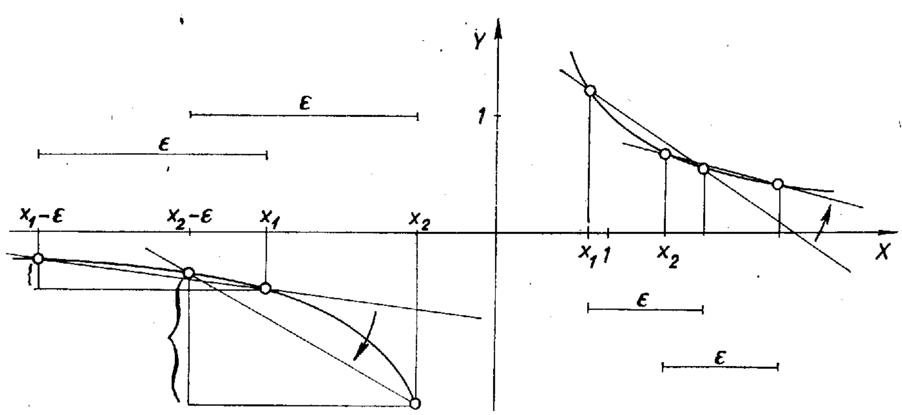
egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ezek abból adódnak, hogy a tényezők abszolút értéke rendre a számvonal $x_1 - \varepsilon$, x_1, $x_2 - \varepsilon$, x_2, ill. x_1, $x_1 + \varepsilon$, x_2, $x_2 + \varepsilon$ abszcisszájú pontja és minden esetben a $-s/r$ pont közti távolság, és a feltevések folytán az I. esetben a ($3a$) bal oldalán, a II. esetben pedig a ($4a$) jobb oldalán álló 2–2 távolság rendre nagyobb, mint a másik oldalon álló megfelelő távolság (1. ábra). – Ezzel a bizonyítást befejeztük.



1. ábra

Kas Péter (Budapest, Szinyei Merse P. g. IV. o. t.)
Pap Márta (Budapest, Kölcsey F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Szemléljük a bebizonyított állításokat a $p = s = 0$, $q = r = 1$ eset példáján, a jól ismert $f(x) = 1/x$ függvényen. Ekkor (2) szerint (1) az $x < 0$ és $x > 0$ értelmezési tartomány mindkét összefüggő részében külön-külön csökkenő.



2. ábra

(3) és (4) e részek két-két egyenlő, ti. ε hosszúságú intervallumában bekövetkezett csökkenéseket hasonlítják össze, mindig a nagyobb függvényértékekből a kisebbet vonva ki. Az I. esetben x_2, a II.-ban x_1 van közelebb az $x = 0$ szakadási helyhez, és (3) és (4) azt fejezi ki, hogy a mondott csökkenés a szakadási helyhez közelebb eső ε-intervallumban nagyobb.

(3)-at és (4)-et ε-nal osztva az egyenlőtlenségek iránya változatlan marad, és azt kapjuk, hogy a görbe egyenlő vetületű húrjainak meredeksége csökken, míg a szakadási helyhez balról közeledünk, és nő, miután e helyet átléptük.