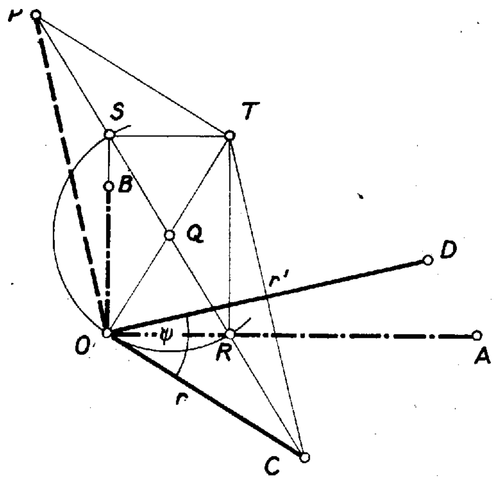
**I. megoldás.** I. Számítással követjük a Rytz-féle szerkesztésnek az 1416. feladatban is idézett lépéseit. Legyen az ellipszis középpontja $O$, a két konjugált félátmérő $OC = r$, $OD = r'$, ahol $r' \geq r$, és a köztük levő hegyesszög $COD\sphericalangle = \psi$. (Ugyanis $\psi \neq 0°$, másrészt a $\psi = 90°$ eset vizsgálata fölösleges, ekkor $r$ és $r'$ maguk a féltengelyek.)




Forgassuk el $D$-t $O$ körül úgy, hogy új $P$ helyzetében $COP\sphericalangle = \psi + 90°$, legyen $CP$ felezőpontja $Q$, és messe a $Q$ körüli, $QO$ sugarú kör a $QC$ félegyenest $R$-ben, $QP$-t $S$-ben. Ekkor, mint az idézett feladatban is láttuk, az ellipszis féltengelyei $CS = a$, $CR = SP = b$, ezért $CP = a + b$, $RS = 2QO = a - b$. A koszinusz-tételt alkalmazva

$$(a+b)^2 = CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2 \cdot OC \cdot OP \cdot \cos(90° + \psi) = r^2 + r'^2 + 2rr' \sin\psi, \tag{1}$$

továbbá $O$-nak $Q$-ra való $T$ tükörképe a $POC$ és $SOR$ háromszöget paralelogrammává egészíti ki, és az utóbbi derékszögű; így $RS$ egyenlő az $OCTP$ paralelogramma átlójával:

$$(a-b)^2 = RS^2 = OT^2 = 2\left(OC^2 + OP^2\right) - CP^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \sin\psi. \tag{2}$$

Ezek szerint

$$a,\ b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\sin\psi} \pm \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\sin\psi}\right). \tag{3}$$

Másrészt a nagytengely iránya $OR$, így

$$COR\sphericalangle = COQ\sphericalangle - ROQ\sphericalangle = COQ\sphericalangle - 90° + OQC\sphericalangle/2,$$

hiszen $OQR$ egyenlőszárú háromszög. E célra, (1) és (2) alapján

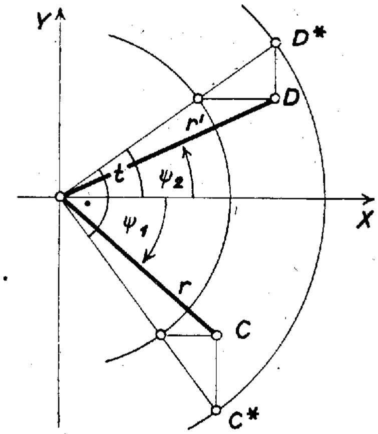
$$\cos COQ\sphericalangle = \frac{OC^2 + OQ^2 - CQ^2}{2OC \cdot OQ} = \frac{r^2 - rr'\sin\psi}{2r \cdot OQ} = $$
$$= \frac{r - r'\sin\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\sin\psi}},$$
$$\cos OQC\sphericalangle = \frac{QO^2 + QC^2 - OC^2}{2 \cdot QO \cdot QC} = \frac{r'^2 - r^2}{\sqrt{\left(r^2 + r'^2\right)^2 - 4r^2r'^2\sin^2\psi}}.$$

(1) és (2) összehasonlításából látjuk, hogy $RS < CP$, tehát $R$, $S$ mindig a $CP$ szakaszon adódnak. Így pedig $R$ a $COD$ szögtartományban van, mert a $POS$ szöget derékszöggel visszaforgatva, szárai $OD$-re és $OR$-re jutnak, hiszen Thalész tétele miatt $SOR$ derékszög.

II. Az adott numerikus értékrendszer esetében

$$CP^2 = 5, \qquad RS^2 = 1, \qquad a = \left(\sqrt{5} + 1\right)/2, \qquad b = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2,$$
$$COQ\sphericalangle = 90°, \quad \cos OQC\sphericalangle = 1/\sqrt{5}, \quad OQC\sphericalangle = 63{,}43°, \quad COR\sphericalangle = 31{,}72°.$$

*Wagner András* (Pécs, Zipernovszky K. Gépip. Techn., III. o. t.)
*Gallatz Imre* (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)




**II. megoldás.** Ellipszisünket a szokásos állásban behelyezzük a derékszögű koordinátarendszerbe, vagyis egyenlete $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, és a konjugált átmérőknek azt a felét vesszük $OC=r$-nek és $OD=r'$-nek, hogy $OC$-ből $+45°$-os forgás vigyen át az $OD$ irányba, és eközben átlépjük az $X$-tengely pozitív felét. Legyen $D^*$ az ellipszis $x^2+y^2=a^2$ főkörének az a pontja, amelyből kiindulva az $a$ és $b$ sugarú koncentrikus körök felhasználásával $D$-t kapjuk, és legyen az $XOD^*$ paraméterszög $t$; ekkor $D$ koordinátái – mint az 1416. feladatban is láttuk – $(a\cos t,\ b\sin t)$. Továbbá a $C$-t ugyanígy előállító $C^*$ pontra $XOC^*\sphericalangle=t-90°$, mert $OC^*$ és $OD^*$ a főkörben szintén konjugáltak, és így merőlegesek, ezért $C$ koordinátái $(a\sin t,\ -b\cos t)$. Ezekből egyrészt

$$OC^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t=r^2,\qquad OD^2=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t=r'^2,$$

és összeadással

$$a^2+b^2=r^2+r'^2; \tag{4}$$

másrészt az $XOC$, $XOD$ forgásszöget $\psi_1$-gyel, ill. $\psi_2$-vel jelölve

$$\begin{aligned}\sin\psi_1&=-\frac{b}{r}\cos t, &\qquad \cos\psi_1&=\frac{a}{r}\sin t,\\ \sin\psi_2&=\frac{b}{r'}\sin t, &\qquad \cos\psi_2&=\frac{a}{r'}\cos t,\end{aligned} \tag{5}$$

és így

$$\sin\psi=\sin(\psi_2-\psi_1)=\frac{ab}{rr'}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)=\frac{ab}{rr'},$$

amiből

$$ab=rr'\sin\psi. \tag{6}$$

Mármost (6) 2-szeresét (4)-höz hozzáadva, majd belőle levonva $(a+b)^2$-et, $(a-b)^2$-et kapjuk, ezekből pedig gyökvonással az I. megoldásbeli (3) eredményeket. Ezek után a nagytengely irányát (5) bármelyik kifejezése alapján megállapíthatjuk.

*Bodor István* (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)
*Gegesy Ferenc* (Budapest, Móricz Zs. g. II. o. t.)