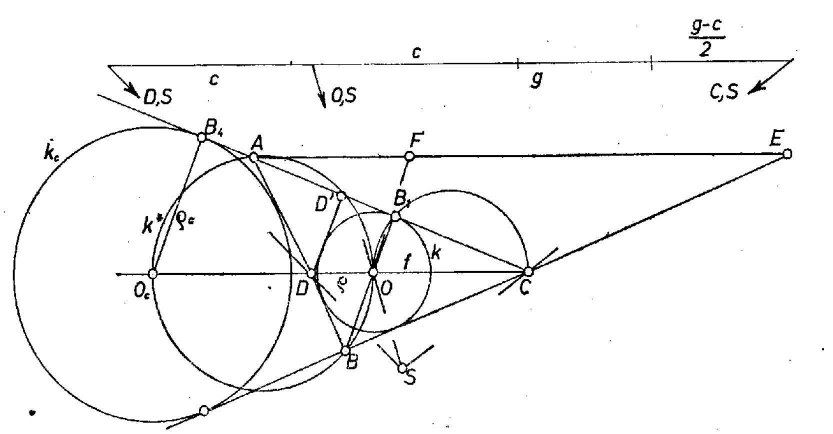
I. megoldás. I. Legyen az előírásoknak megfelelő ABC háromszögben az AB oldal, a C-ből kiinduló belső szögfelezőnek az AB egyenesig terjedő CD szakasza, valamint a CA és CB oldalak összege rendre egyenlő az adott c, f és $g=a+b$ szakasszal.

A CD szakaszon kijelölhető a háromszögbe beírt k kör O középpontja és meghatározható e kör sugara is. Fordítsuk rá CA-t C körül BC meghosszabbítására és legyen A új helyzete E, így $BE=g$, másrészt $CEA\sphericalangle = ACB\sphericalangle/2 = BCD\sphericalangle$, ezért $AE \parallel DC$ (1. ábra).



1. ábra

Az ABC szög belső szögfelezője CD-t O-ban metszi, AE-n levő pontja legyen F. Ekkor az előzők és a szögfelező osztásaránya alapján

$$CO:OD = EF:FA = EB:AB = g:c. \tag{1}$$

Ismeretes másrészt, hogy k-nak AC-n levő B_1 érintési pontjára nézve

$$CB_1 = \frac{a+b-c}{2} = \frac{g-c}{2}. \tag{2}$$

Ezek alapján a háromszöget az alábbiak szerint szerkeszthetjük. A $CD=f$ szakaszt $g:c$ arányban kettéosztjuk az O ponttal; a CO rész fölötti Thalész-kört metsszük a C körüli, $(g-c)/2$ sugarú körrel B_1-ben. Ekkor az O körüli, OB_1 sugarú kör lesz k, ennek C-ből húzott érintői és D-ből húzott egyik érintője rendre a CA, CB, ill. AB oldalegyenes. (Az utóbbi érintő tetszés szerint választható – amennyiben D-ből 2 érintő húzható –, mert a 2 érintő egymás tükörképe CD-re.)

A kapott háromszögben CD felezi az ACB szöget, másrészt az oldalak hosszára vonatkozóan (1), ill. (2) alapján

$$(AC+CB):AB = CO:OD = g:c,$$
$$\frac{(AC+CB)-AB}{2} = \frac{g-c}{2},$$

ezekből pedig egyszerű számítás szerint $AC+CB=g$ és $AB=c$.

A szerkesztés végrehajtásának nyilvánvaló első föltétele $g>c$. A B_1 pont létrejön és k valódi kör, ha $CB_1<CO$; továbbá D-ből lehet érintőt húzni a kapott k-hoz, ha $OD \ge OB_1$, azaz

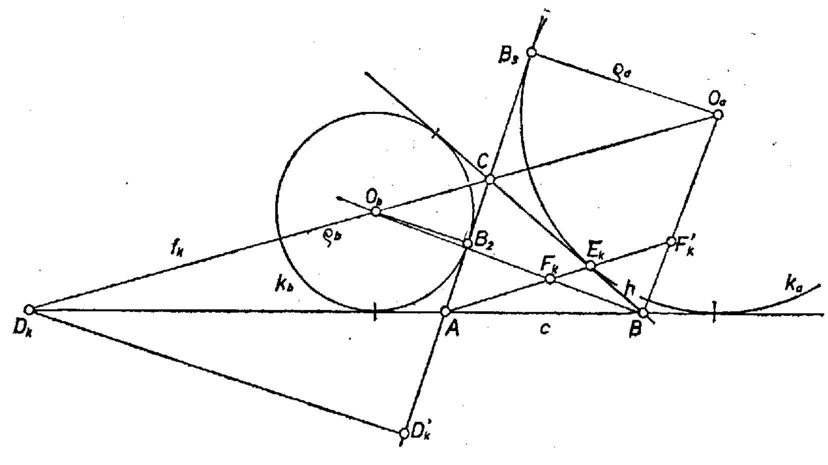
$$\frac{g-c}{2} < f\cdot\frac{g}{g+c}, \qquad f\cdot\frac{c}{g+c} \ge \sqrt{\frac{f^2g^2}{(g+c)^2} - \frac{(g-c)^2}{4}}.$$

Ezeket f-re megoldva és összefoglalva

$$\frac{g^2-c^2}{2g} < f \le \frac{\sqrt{g^2-c^2}}{2}.$$

Ha f és a talált felső korlát között egyenlőség áll, akkor k átmegy D-n, és egyenlő szárú háromszöget kapunk.

II. A C-ből húzott külső szögfelező akkor és csak akkor metszi az AB egyenest egy D_k pontban, ha a $a \ne b$. Legyen ekkor $CD_k = f_k$ és $a-b=h>0$, így D_k a BA oldal A-n túli meghosszabbításán van és a CD_k szakaszon van rajta a háromszög AC oldalához hozzáírt k_b külső érintő kör O_b középpontja. A háromszög a c, f_k és h adatokból a fentiekhez hasonlóan szerkeszthető. Fordítsuk rá CA-t C körül a CB félegyenes CE_k szakaszába, és messük a BO_b (belső) szögfelezővel az AE_k szakaszt F_k-ban (2. ábra).



2. ábra

Így $AE_k \parallel CD_k$ és $BAE_k\triangle \sim BD_kC\triangle$, továbbá

$$CO_b : O_bD_k = E_kF_k : F_kA = E_kB : AB = h : c. \tag{3}$$

Másrészt, k_b-nek a CA szakaszon levő B_2 érintési pontjára nézve

$$CB_2 = \frac{b+c-a}{2} = \frac{c-(a-b)}{2} = \frac{c-h}{2}.$$

Ezek alapján a fentiekhez hasonlóan megszerkesztjük a CD_k szakaszon O_b-t, a CO_b szakasz fölötti Thalész-kör és a C körüli $(c-h)/2$ sugarú kör metszéseként B_2-t, O_b körül O_bB_2 sugárral k_b-t, és ekkor az ABC háromszög oldalegyeneseit mint a k_b-hez C-ből húzott mindkét és a D_k-ból húzott egyik érintőt kapjuk.

A szerkesztés helyessége a fentihez hasonló számítással bizonyítható.

A szerkesztés végrehajtható, ha $h < c$ és $CB_2 < CO_b$. Az utóbbi teljesülése esetén (3) és $c > h$ alapján

$$O_bD_k > O_bC > O_bB_2,$$

tehát ha k_b létrejött, akkor D_k-ból meghúzható hozzá az érintő.

Göndőcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn.) dolgozatából, kiegészítéssel

Megjegyzések. 1. A II. adathármas esetében célhoz érünk a BC oldalhoz hozzáírt k_a külső érintő kör fölhasználásával is. Ennek O_a középpontja a CD_k szakasz C-n túli meghosszabbításán és az ABE_k szög BF'_k külső szögfelezőjén van, és $CO_a : O_aD_k = h : c$, másrészt a kör AC-n levő B_3 érintési pontjára $CB_3 = s - b = (a - b + c)/2 = (c + h)/2$.

2. Hasonlóan az I. adathármas esetében az AB oldalhoz hozzáírt k_c kör (CD meghosszabbításán levő) O_c középpontjára és AC-n levő B_4 érintési pontjára $CO_c : O_cD = g : c$ és $CB_4 = (g + c)/2$, ezek alapján a fentiekhez hasonlóan végezhetjük a szerkesztést.

3. Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a háromszög oldalegyeneseit érintő körök O és O_c, ill. O_a, O_b középpontjai közül az előbbi, ill. az utóbbi párt egyidejűen használjuk fel. Ezt csak az I. adathármas esetére mutatjuk be. Az $AD : DB = AC : CB$ aránypárból fölcseréléssel, majd az 1. ábra BDC és BAE hasonló háromszögei alapján

$$AD : AC = BD : BC = BA : BE = c : g.$$

Eszerint A is, B is rajta van a D, C alappontokkal és a $c : g$ aránnyal meghatározott k^* Apollóniosz-körön. Láttuk másrészt, hogy O és O_c e körnek a CD egyenesen levő pontjai, tehát az OO_c szakasz a kör átmérője. Ennélfogva a CD szakasz fölvétele, O és O_c kijelölése és k^* megrajzolása után ebbe c hosszúságú és D-n átmenő húrt kell illesztenünk.

Siklósi István (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

4. A fenti k, k_c körpárnak C a külső, D pedig a belső hasonlósági pontja (mert centrálisukat az AB közös belső érintő D-ben metszi), így

$$DO : DO_c = CO : CO_c,$$

mert mindkét arány egyenlő a körök sugarainak $\varrho : \varrho_c$, arányával. E szakaszokat a CA egyenesre vetítve, a vetületek aránya ugyancsak egyenlő, és az utóbbi kettő – mint már láttuk – kifejezhető c-vel és g-vel:

$$D'B_1 : D'B_4 = CB_1 : CB_4 = \frac{g-c}{2} : \frac{g+c}{2}, \tag{4}$$

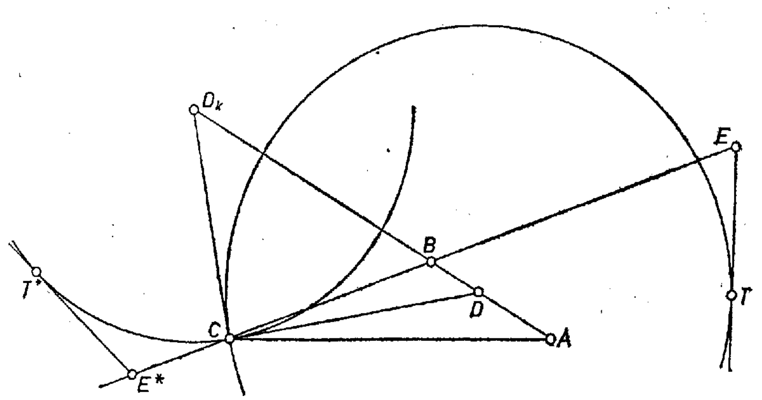
ahol D' a D pont vetülete (1. ábra).

Ezek alapján a C csúcs és a CA félegyenes helyzetét felvéve, ezen B_1 és B_4, továbbá, (4) alapján D' kijelölhető. Ekkor a D'-ben CA-ra emelt merőlegesből a C körüli, f sugarú körívvel kimetszhetjük D-t, CA-nak CD-re való tükörképe a CB egyenes, B_1 alapján megkaphatjuk O-t és k-t (vagy B_4 alapján O_c-t és k_c-t), és ennek D-ből húzott érintője az AB oldal egyenese.

A bizonyítást és a diszkussziót a fentiekhez hasonlóan végezheti el az olvasó.

f_k és $a - b = h$ esetére D_k-nak CA-n levő vetületére hasonlóan $D'_k B_2 : D'_k B_3 = CB_2 : CB_3 = (c - h) : (c + h)$.

II. megoldás (vázlat). Alapszerkesztésre vezethetjük vissza feladatunk mindkét részét az 1438. feladatban[1] bebizonyított – ill. csak kimondott – tétel felhasználásával. Eszerint a D középpontú, f sugarú (ill. a D_k-val és f_k-val meghatározott) körhöz tetszés szerinti pontjában húzott érintőre fölmérjük $AB = c$ szakaszt, majd ennek E (ill. E^*) végpontja körüli g (ill. h) sugarú körrel metsszük az előbbi kört C-ben. Ekkor $DCE\sphericalangle = ACB\sphericalangle/2$, (ill. $D_kCE^*\sphericalangle = 90° - ACB\sphericalangle/2$), tehát ismerjük a keresett háromszög C-beli szögét, innen kiinduló oldalainak összegét (különbségét) és a szemben fekvő oldalt (3. ábra).



1. ábra

Lakatos László (Budapest, Százados úti Gimn.)

[1] K. M. L. 33 (1966) 208. o. (a mostani feladat kitűzését tartalmazó számban): Az ABC háromszög C-ből kiinduló szögfelezőjének az AB oldallal való D metszéspontja körül DC sugárral kört írunk, másrészt a CB oldalt B-n túl meghosszabbítjuk a $BE = CA$ szakasszal. Bizonyítandó, hogy ekkor az E-ből a körhöz húzott érintő hossza egyenlő AB-vel. Hasonlóan a C-nél levő külső szög felezőjének AB-n levő D_k pontja körüli, D_kC sugarú körhöz a B-től C felé fölmért $BE^* = CA$ szakasz E^* végpontjából húzott érintő hossza szintén AB.