I. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n=1$ esetén (1) két oldala $(-1+16)+2(-1+4)=21=(1+2)+2(1+8)$, az állítás helyes. Feltesszük, hogy az állítás helyes n helyén valamilyen $k(\geq 1)$ egész számra.

Áttérve az $n=k+1$ esetre és $2k+1$-et a-val jelölve (1) bal oldalához a következő tagok jönnek hozzá:

$$\begin{gathered}\{-a^4+(a+1)^4\}+2\{-a^2+(a+1)^2\}= \\ =\{(a+1)^2-a^2\}\cdot\{(a+1)^2+a^2+2\}=(2a+1)(2a^2+2a+3);\end{gathered}$$

(1) jobb oldalához pedig

$$\begin{gathered}a+(a+1)+2[a^3+(a+1)^3]= \\ =[a+(a+1)]\cdot\{1+2[a^2-a(a+1)+(a+1)^2]\}= \\ =(2a+1)(2a^2+2a+3),\end{gathered}$$

vagyis ugyanannyi. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Bölcskei Hedvig (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A bizonyítás mutatja, hogy

$$V_{2k}=m^{2k}-(m-1)^{2k}+\ldots+(-1)^{m-1}\cdot 1^{2k}$$

jelölés mellett minden egész m-re fennáll (1), de a teljes indukciót ez esetben m-ről $m+2$-re célszerű végezni (és megfelelően az $m=1$ és $m=2$ eseteket kipróbálni).

II. megoldás. (1) tagjai között egyszerű összefüggéseket találunk:

$$\begin{aligned}V_4&=(2^4-1^4)+(4^4-3^4)+\ldots+[(2n)^4-(2n-1)^4]= \\ &=1\cdot(2+1)(2^2+1^2)+1\cdot(4+3)(4^2+3^2)+\ldots+ \\ &+1\cdot[(2n)+(2n-1)]\cdot[(2n)^2+(2n-1)^2]= \\ &=[2(2^3+1^3)-2^2+1^2]+[2(4^3+3^3)-4^2+3^2]+ \\ &+\ldots+\{2[(2n)^3+(2n-1)^3]-(2n)^2+(2n-1)^2\}= \\ &=2S_3-V_2,\ \text{azaz } V_4+V_2=2S_3. \\ V_2&=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\ldots+[(2n)^2-(2n-1)^2]= \\ &=1\cdot\{(2+1)+(4+3)+\ldots+[(2n)+(2n-1)]\}=S_1.\end{aligned}$$

E két összefüggést összeadva megkapjuk (1)-et.

Megjegyzés. A kifejezéseket egymástól függetlenül is előállíthatjuk n függvényeként. Ismert összefüggések szerint

$$\begin{aligned}&S_1=n(2n+1),\ S_3=(1+2+\ldots+2n)^2=S_1^2=n^2(2n+1)^2, \\ &V_2=-[1^2+2^2+\ldots+(2n)^2]+2[2^2+4^2+\ldots+(2n)^2]= \\ &\quad=-\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}+2\cdot 2^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)= \\ &\quad=\frac{1}{3}[-n(2n+1)(4n+1)+2^2\cdot n(n+1)(2n+1)]= \\ &\quad=n(2n+1),\end{aligned}$$

továbbá teljes indukcióval igazolható, hogy

$$1^4+2^4+\ldots+k^4=\frac{1}{30}\cdot k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1),$$

ennek alapján V_2 iménti számításához hasonlóan

$$V_4=2n(2n+1)(4n^2+2n-1).$$

Ez az út azonban – mintegy a kevesebb ötlet pótlására – több számolást igényel.

Vetier András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)