I. megoldás. Legyenek az egyenlet gyökei x_1, x_2, x_3, és az első kettő egymásnak reciproka, vagyis $x_1x_2=1$. Ekkor (1) bal oldala azonos a következő kifejezéssel: [1]

$$24(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)= \tag{2}$$
$$=24x^3-24x^2(x_1+x_2+x_3)+24x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-24x_1x_2x_3,$$

mert a kettő különbsége legfeljebb másodfokú polinom, és eltűnik az x_1, x_2 és x_3 helyeken, s így csak azonosan 0 lehet. Ennélfogva az x-et nem tartalmazó tagok is egyenlők, ebből

$$-24x_1x_2x_3=-24x_3=-60,\quad \text{ezért}\quad x_3=5/2. \tag{3}$$

Mostmár az x^2-et tartalmazó tagok egyenlőségéből [2]

$$-24x^2(x_1+x_2+x_3)=-10x^2,\quad x_1+x_2=\frac{10}{24}-\frac{5}{2}=-\frac{25}{12}.$$

Ezek szerint x_1 és x_2 a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x_2+\frac{25}{12}x+1=0, \tag{4}$$

amit megoldva (1) gyökei $x_1=-3/4$, $x_2=-4/3$, $x_3=5/2$. Az első kettő valóban egymás reciproka.

Nagy László (Esztergom, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. (4) bal oldalához jutunk úgy is, hogy (1) bal oldalát osztjuk a (3)-ból kapott gyökhöz tartozó gyöktényezőnek és x^3 együtthatójának szorzatával, $24(x-x_3)=24x-60$-nal.

II. megoldás. (1) bal oldalának gyöktényezős alakja

$$24(x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_1}\right)(x-x_3). \tag{5}$$

és itt az első két gyöktényező szorzata $x+ux+1$ alakú, ahol $u=-x_1-1/x_1$. Az u értékét meghatározhatjuk abból, hogy x^2+ux+1 osztója (1) bal oldalának, tehát az osztási maradék 0, az x tetszés szerinti értéke esetében. Mármost

$$\begin{array}{lllll}
(24x^3- & 10x^2 & -101x & -60): & (x^2+ux+1)=24x-(24u+10)\\
\pm24x^3\pm & 24ux^2 & \pm24x & & \\
\hline
 & -(24u+10)x^2 & -125x & -60 & \\
 & \mp(24u+10)x^2 & \mp(24u^2+10u)x & \mp(24u+10) & \\
\hline
 & & (24u^2+10u-125)x & +(24u-50) &
\end{array}$$

A maradék akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha u olyan érték, amelyre

$$24u^2+10u-125=0\quad \text{és}\quad 24u-50=0.$$

Az utóbbi szerint csak $u=25/12$ jön szóba, és ez az első egyenletet is kielégíti.

Ezzel ismét (4)-re jutottunk. Másrészt az osztás hányadosa (5) szerint $24(x-x_3)=24x-24x_3$, ezért

$$x_3=\frac{-(24u+10)}{-24}=\frac{50+10}{24}=\frac{5}{2}.$$

III. megoldás. (1) egyik gyöke sem 0, mert $x=0$ esetén a bal oldal értéke -60; így mindhárom gyök reciproka létezik. Keressük azt az egyenletet, melynek gyökei $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$. Feltevésünk szerint $i=1,2,3$ esetén

$$24x_i^3-10x_i^2-101x_i-60=0.$$

Ez $x_i\neq0$ miatt így is írható:

$$-60(1/x_i)^3-101(1/x_i)^2-10(1/x_i)+24=0,$$

így a keresett egyenlet

$$-60x^3-101x^2-10x+24=0. \tag{6}$$

Mivel jelölésünk szerint $1/x_1=x_2$ és $1/x_2=x_1$, azért (1)-nek és (6)-nak két gyöke közös, és ugyanez áll a belőlük adódó

$$x^3-\frac{10}{24}x^2-\frac{101}{24}x-\frac{5}{2}=0\quad \text{és} \tag{1'}$$

$$x^3+\frac{101}{60}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{2}{5}=0 \tag{6'}$$

[1] Lásd e tárgykörhöz: *Surányi János:* Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961/11) 103–105. o.

[2] Az elsőfokú tagok együtthatóinak összehasonlításából ugyanez adódik.

egyenletekre. Ezek gyöktényezős alakja

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0, \quad \text{ill.} \tag{1''}$$

$$(x-x_2)(x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_3}\right)=0. \tag{6''}$$

A közös gyökök gyökei a két bal oldal különbségének, vagyis a

$$-\frac{21}{10}x^2-\frac{35}{8}x-\frac{21}{10}=-\frac{21}{10}\left(x^2+\frac{25}{12}x+1\right)=0$$

egyenletnek is, amivel lényegében ismét (4)-re jutottunk. Másrészt a két gyöktényezős alak, (1″) és (6″) különbségét képezve az

$$(x-x_1)(x-x_2)\left(-x_3+\frac{1}{x_3}\right)=0$$

alakra jutunk, amit az előbbivel összehasonlítva kapjuk, hogy x_3 az

$$\frac{1}{x_3}-x_3=-\frac{21}{10}$$

egyenlet egyik gyöke, vagyis az $5/2$ és $2/5$ értékek egyike. Behelyettesítéssel adódik, hogy $x_3=5/2$ elégíti ki (1)-et.

Zöldy Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)