Nyilvánvalóan $n \geq 2$. Legyen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, ekkor a számláló és a nevező i-edik tagjának nevezője $S - a_i$, ahol $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Föltesszük, hogy ezek egyenként, valamint (1) egész nevezője 0-tól különböző.

$n = 2$ esetén $S = a_1 + a_2$, és a kifejezés:

$$K_2 = \frac{\dfrac{a_1\,(a_1 - a_2)}{S - a_1} + \dfrac{a_2\,(a_2 - a_1)}{S - a_2}}{\dfrac{a_1 - a_2}{S - a_1} + \dfrac{a_2 - a_1}{S - a_2}} = \frac{(a_1 - a_2)\left(\dfrac{a_1}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_1}\right)}{(a_1 - a_2)\left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_1}\right)} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 - a_2} = a_1 + a_2,$$

ugyanis a nagy nevezőre kimondott föltevés miatt $a_1 - a_2 \neq 0$, a vele való egyszerűsítések megengedettek voltak.

Megmutatjuk, hogy $n > 2$ esetén is S-sel egyenlő a kifejezés. Szorozzuk (1) nevezőjét S-sel, éspedig az i-edik tag esetében az $S = (S - a_i) + a_i$ alakban. Az első taggal szorozva az illető tört számlálóját kapjuk, ami $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ esetén $a_i - a_{i+1}$, $i = n$ esetén pedig $a_n - a_1$, a második taggal való szorzás pedig (1) számlálójának megfelelő tagját adja. Összevonva az első szorzatokat

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_1) = 0$$

adódik, ennélfogva a nagy nevező S-szerese valóban egyenlő a számlálóval. Ezek szerint a kifejezés egyszerűbb alakja $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ számokra kimondott $n+1$-edik föltétel, ti. hogy a nagy nevező $\neq 0$, aligha pótolható egyszerűbb föltételekkel.

Draschitz Rudolf (Budapest, Landler J. Gép- és Híradásip. Techn., III. o. t.)

Megjegyzés. Legyen

$$s(x) = \frac{a_1(a_1 - a_2)}{x - a_1} + \frac{a_2(a_2 - a_3)}{x - a_2} + \ldots + \frac{a_n(a_n - a_1)}{x - a_n},$$
$$n(x) = \frac{a_1 - a_2}{x - a_1} + \frac{a_2 - a_3}{x - a_2} + \ldots + \frac{a_n - a_1}{x - a_n},$$

ekkor a feladatunkban szereplő kifejezés értéke egyenlő az $f(x) = \dfrac{s(x)}{n(x)}$ függvénynek az $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ helyen felvett értékével. Tegyük fel, hogy

$$x \neq a_1; \quad x \neq a_2; \quad \ldots; \quad x \neq a_n; \quad n(x) \neq 0,$$

így az $s(x)$, $n(x)$ és $f(x)$ értelmezésében fellépő törtek nevezői 0-tól különbözőek. (Ez a feltevés $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ mellett azt jelenti, hogy az (1)-beli kifejezésben fellépő törtek nevezői különbözőek 0-tól.) Írjuk először egyszerűbb alakra a

$$g(x) = x \cdot n(x) - s(x)$$

függvényt; a jobb oldalon álló különbségben az azonos nevezőjű törteket összevonva kapjuk, hogy

$$g(x) = \frac{(a_1 - a_2)(x - a_1)}{x - a_1} + \frac{(a_2 - a_3)(x - a_2)}{x - a_2} + \ldots + \frac{(a_n - a_1)(x - a_n)}{x - a_n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_1) = 0,$$

az $s(x)$, $n(x)$, $f(x)$ értelmezését biztosító feltételek mellett tehát $x \cdot n(x) - s(x) = 0$, azaz $f(x) = \dfrac{s(x)}{n(x)} = x$. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy az $f(x)$ függvény azonos volna az $f_0(x) = x$ függvénnyel, hiszen $f(x)$ és $f_0(x)$ értelmezési tartománya nem azonos. Állításunkban csak azt mondtuk ki, hogy ahol $f(x)$ értelmezve van, ott egyenlő $f_0(x)$-szel.

A feladatunkban szereplő kifejezés értéke tehát – ha a nevezői 0-tól különbözőek – egyenlő $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$-nel. (Ha $n = 1$, akkor $x \neq a_1$ miatt kifejezésünk nincs értelmezve.)