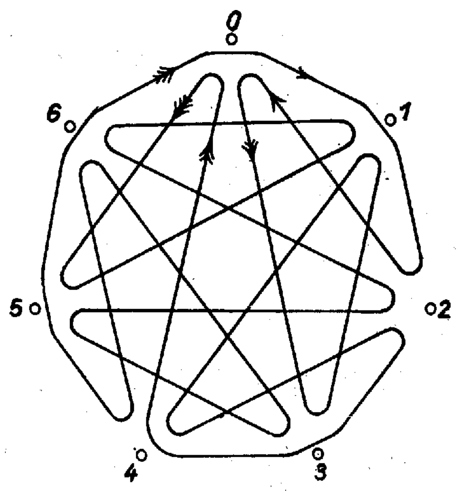
I. megoldás. Megadunk egy előírást a bejárásra, mégpedig olyant, amelynél minden útszakaszon (oldalon vagy átlón) megszakítás nélkül haladunk végig, irányt csak a sokszög csúcsaiban változtatunk.

Jelöljük a sokszög csúcsait (tetszés szerinti sorrendben) a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n$ számokkal. A 0-ból indulunk el, az 1-en, 2-n át visszatérünk oda, majd minden lépésben 2 újabb csúcsot az előbbiekkel és egymással összekötő útszakaszokat járjuk be. Ha a $0,\ 1,\ \ldots,\ 2k$ $(k<n)$ közti útszakaszokat már bejártuk és visszatértünk 0-ba, akkor a következő úton megyünk tovább:

$$0,\ 2k+1,\ 1,\ 2k+2,\ 2,\ 2k+1,\ 3,\ \ldots,\ 2k-1,\ 2k+2,\ 2k,\ 2k+1,\ 2k+2,\ 0.$$

Ezzel programunkat megvalósítottuk és visszaértünk a 0-ba, az eljárást tovább folytathatjuk, míg minden útszakaszt be nem jártunk.



1. ábra

Az 1. ábra a szabályos 7-szög ilyen bejárását mutatja be. Megjegyezzük, hogy a sokszög szabályos voltát nem használtuk fel, legfeljebb, amennyiben csak egyenes útszakaszokat engedünk meg, csak annyit, hogy $2n+1$ pont van adva, amelyek közül nincs 3 egy egyenesen.

Langer Tamás (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

II. megoldás. A bejárás lehetőségét konkrét bejárási előírás megadása nélkül fogjuk belátni. Egy A csúcsból tetszés szerint elindulva haladjunk tovább minden csúcsból valamilyen útszakaszon, amíg olyan csúcsba nem érünk, amelyikből induló minden útszakaszon jártunk már; röviden: amíg megakadunk. Ez csak az A csúcsban lehet. Ugyanis minden más csúcson mindig át tudunk haladni, mert egy áthaladás 2 ott végződő útszakaszt használ fel, így a csúcsban az egymás utáni áthaladások után bejáratlanul maradt útszakaszok száma a páros számok $2n-2,\, 2n-4,\, \ldots$ sorozatán át csökken. A-ban viszont a páratlan számok sorozatán át csökken ez a szám, mert az elindulás után $2n-1$ útszakaszt hagytunk vissza.

Amennyiben az A-beli megakadásig nem jártuk be az egész úthálózatot, akkor javítjuk útvonalunkat úgy, hogy több útszakaszon haladjon át. Mindenesetre minden csúcson legalább egyszer áthaladtunk, hiszen bejártuk az A-ból odavezető utat. Minden olyan csúcsban, ahová még fut be bejáratlan útszakasz, páros az ilyenek száma. Egy ilyen B csúcsból indulva és a maradék hálózaton megtett utunkat egy más színnel rajzolva csak B-ben akadhatunk meg ismét. Mármost a két különböző színű útvonalat eggyé tehetjük úgy, hogy az első bejárás során B-be érkezve beiktatjuk az új színnel bejárt útvonalat, s csak ezután haladunk tovább az első útvonalon.

Ha még mindig nem jártuk be az egész hálózatot, akkor ismét olyan részhálózat maradt vissza, mint az első megakadás után, s így megismételhetjük eljárásunkat. Az eredeti sokszög oldalainak és átlóinak száma véges, ezért véges számú hasonló útvonal-módosítás után egyetlen, az egész hálózatot bejáró útvonalat kapunk.

Megjegyzések 1. Feladatunk állítása egy *gráfelméleti* tételből is következik. [1]

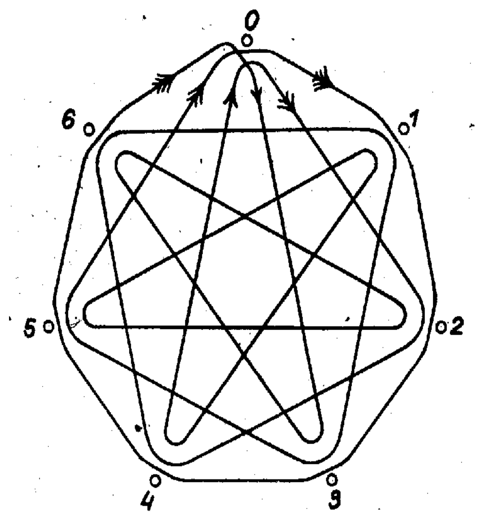
2. Megadjuk egy más, érdekes, rendszeres bejárás utasítását. A sokszög egymás utáni csúcsait ismét a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$ számokkal jelöljük. Előkészítésül az átlókat osztályokba soroljuk, r-edosztályúnak nevezzük azokat, amelyekkel a sokszöget kettévágva a kisebbik rész r oldalt tartalmaz a kerületből. Így a legnagyobb osztályszám n; az oldalakat első osztályú átlóknak tekintjük, ekkor az osztályok száma n. Továbbá minden átlón előre megállapítjuk a menetirányt: úgy haladunk, hogy a sokszög nagyobbik része – más szóval a sokszög középpontja – jobb kezünk felé essék (röviden: az átlókat irányítjuk). Így minden útszakasznak kijelöltük a kezdő és végpontját, minden csúcsban n átló kezdődik (indul), és n átló végződik (érkezik), minden egyes átló-osztályból egy-egy.

A bejárást a következő előírások szerint végezzük: 1. A 0-jelű csúcsból indulunk ki. 2. Ekkor és minden ide való visszaérkezés után a még rendelkezésre álló átlók közül a legmagasabb osztályú átlón haladunk tovább. 3. A 0-tól

[1]Lásd pl. *Ruzsa I.–Cser A.–Könyves Tóth K.–dr. Hajnal A.–Bakos T.:* Matematika, a matematikai osztályok számára, III. kötet, 325–400 o., élesebben 363—355. o. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

különböző csúcsba érkezve ugyanolyan osztályú átlón haladunk tovább, mint amilyenen oda érkeztünk. 4. A 01 szakasz bejárása után a 0 csúcs megkülönböztetett szerepét átadjuk az 1 csúcsnak, majd hasonlóan a 2-nek és í. t.

Eljárásunk szemléletesen a következőt jelenti. 0-ból a $0r$ átlón megindulva végigjárjuk az r, $2r$, $3r$, $\ldots$ csúcsokat – ahol a $2n$-nél nagyobb számokat a $2n+1$-gyel való osztásuk maradékával kell helyettesíteni –, míg vissza nem érünk a 0-ba. Ha r-nek és $2n+1$-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez az összes r-edosztályú átló alkotta *csillag*-$2n+1$-*szög* [2] bejárása után következik be (*).



2. ábra

A $2n+1=7$ esetben (2. ábra) $r=3$ és 2 esete is ilyen, s így 0-ból indulva az összes 3-ad-, majd 2-odosztályú átlót bejárjuk, majd végigmegyünk az oldalakon. Hasonló a helyzet, ha $2n+1$ prímszám. $2n+1=15$-szögben $r=7$, 4 és 2 esete ilyen (lásd a csúcsok bejárás szerinti sorrendjének alábbi felsorolását). Az $r=n$ eset mindig ilyen, mert n és $2n+1$ relatív prímek.

Ha r és $2n+1$ legnagyobb közös osztója $d>1$, akkor $(2n+1)/d=e$ lépés után jutunk vissza a 0-ba egy (egyszerű vagy csillag-) szabályos e-szög bejárása után (**). Ekkor a többi r-ed osztályú átló $d-1$ további, az elsővel egybevágó sokszöget ad. Ezeket akkor járjuk be, amikor az 1, 2, $\ldots$, $d-1$ csúcs veszi át a 0 szerepét. A szabályos 15-szög elveink szerinti bejárásában $r=6$ esetére 3 csillagötszög, $r=3$ esetére 3 közönséges ötszög adódik a 0, 1, 2 csúcsokból kiindulva, $r=5$ esetére pedig hasonlóan 5 szabályos háromszög a 0, 1, 2, 3, 4 csúcsokból kiindulva. A csúcsok alábbi felsorolásában egy-egy ilyen vonalrész bejárásának befejezését, valamint a 15-szög 1–1 oldalán való áthaladást is, pontosvessző jelzi.

Ezzel lényegében be is bizonyítottuk, hogy a bejárási előírás 3. pontja mindig teljesíthető. Minden $\overline{jk}$ útszakaszon áthaladtunk – ahol $j<k\le j+n$ ($k>2n$ esetén itt is a mondott helyettesítéssel) –, és csak egyszer. Ha ugyanis nem haladtunk át rajta, mielőtt j átveszi a 0 szerepét, akkor a szerepátvétel után sorra vesszük a j-ből kiinduló összes még be nem járt átlót, utoljára pedig a $\overline{j(j+1)}$ oldalt, és ezzel adjuk át a 0 pont szerepét a $(j+1)$-nek. – Hátra volna azonban még a (*) és (**) jelű állítások bizonyítása.

Szűcs András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)
dolgozata alapján, kiegészítésekkel

3. Ha $2n+1$ prímszám, akkor a következő előírás is a fenti útvonalra vezet: 1. A $\overline{0n}$ átlón indulunk és 2. minden csúcsból az onnan kiinduló legmagasabb osztályú átlón haladunk tovább. – Ha azonban $2n+1$ összetett szám, akkor így a fenti $(2n+1)/d$ oldalú csillagsokszögeket nem mindig egyfolytában járjuk be. Meg lehet mutatni, hogy ekkor viszont a 0 pontba mindig ugyanolyan osztályú átlón érkezünk, amilyenen onnan utoljára elindultunk.

0; 7, 14, 6, 13, 5, 12, 4, 11, 3, 10, 2, 9, 1, 8, 0; 6, 12, 3, 9, 0; 5,
10, 0; 4, 8, 12, 1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 0; 3, 6, 9, 12,
0; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 0; 1, 7, 13, 4, 10,
1; 6, 11, 1; 4, 7, 10, 13, 1; 2; 8, 14, 5, 11, 2; 7, 12, 2; 5, 8, 11,
14, 2; 3; 8, 13, 3; 4; 9, 14, 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 0.

[2] Lásd pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek, I. rész, 3. kiad., Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 46. o.