I. megoldás. A közös bal oldalt polinommá alakítva a bal és jobb oldal különbsége egyszerűsödik és (1) így alakítható:

$$K_1 = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2 - 4abcd = (ab - cd)^2 + (ad - bc)^2,$$

ami nyilvánvalóan nem negatív, tehát az állítás helyes.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha egyidejűen

$$ab = cd \qquad \text{és} \qquad ad = bc. \tag{3}$$

Ezt egyszerűbb feltételekre bonthatjuk. Összeadással

$$a(b + d) = c(b + d),$$

amihez szükséges, hogy teljesüljön:

$$\text{vagy} \quad a = c, \tag{4}$$
$$\text{vagy} \quad b = -d \tag{5}$$

(természetesen egyszerre is teljesülhet a két vagylagos feltétel).
Mindkettő kétféleképpen adódhat:

	vagy	$(4')$	$a = c = 0,$	ekkor $b,\ d$ bármi lehet,
	vagy	$(4'')$	$a = c \neq 0,$	ekkor (3) szerint $b = d$ is fennáll;
ill.	vagy	$(5')$	$b = -d = 0,$	ekkor $a,\ c$ bármi lehet,
	vagy	$(5'')$	$b = -d \neq 0,$	ekkor (3) szerint $a = -c$ is fennáll.

$(4')$ és $(5')$ esetén persze az egész (1) állítás semmitmondó, így lényegében akkor áll (1)-ben egyenlőség, ha

$$a - c = b - d = 0, \qquad \text{és ha} \qquad a + c = b + d = 0.$$

(2) esetében a bal és jobb oldal különbségéhez $2abcd$-t hozzáadva, egyszersmind kivonva, egy négytagú kifejezés négyzetét ismerjük föl:

$$K_2 = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2 - 2ab^2c - 2bc^2d + 2cd^2a + 2da^2b = (ab + ad - bc + cd)^2,$$

ez nem negatív, tehát az állítás helyes. – Mivel a (2) két oldalán álló kifejezések kevesebb szimmetriát mutatnak, a két oldal egyenlőségére nem adódik egyszerű feltétel.

Baróthy Géza (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.)
Mitrocsák Anikó (Makó, József A. g. III. o. t.)

II. megoldás. Mindkét egyenlőtlenség bizonyításában elkerülhetjük a nehézkes beszorzást. (1) jobb oldala kellő csoportosítás után így alakítható:

$$2ac(b + d)^2 + 2bd(a + c)^2 \leq \frac{(a + c)^2}{2} \cdot (b + d)^2 + \frac{(b + d)^2}{2} \cdot (a + c)^2,$$

ahol a jobb oldalban (1) bal oldalát ismerjük föl. – A második lépésben a két pozitív szám mértani és számtani közepe közti egyenlőtlenség négyzetre emelt alakját használtuk föl; így akkor is igaz, ha pl. a és c ellentett előjelűek, hiszen ekkor $ac < 0$ és $(a + c)^2 \geq 0$. – (2) jobb oldala pedig

$$\begin{aligned} 4bc(bc + cd + da + ab) - 4b^2c^2 &= 4bc(a + c)(b + d) - 4b^2c^2, \\ \text{és } K_2 = (a + c)^2 \cdot (b + d)^2 - 4bc(a + c)(b + d) + 4b^2c^2 &= \\ = [(a + c)(b + d) - 2bc]^2 &= (ab - bc + ad + cd)^2. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az (1) jobb oldalának itt használt átrendezése alapján így is haladhatunk:

$$\begin{aligned} K_1 &= (a + c)^2(b + d)^2 - 2ac(b + d)^2 - 2bd(a + c)^2 = \\ &= [(a + c)^2 - 2ac] \cdot [(b + d)^2 - 2bd] - 4abcd = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - 4abcd = \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2 - 4abcd = (ab - cd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$