Nyilvánvaló, hogy két (1) alakú szám összege és különbsége is ilyen alakú, továbbra is racionális szám szorzókkal, hiszen racionális számok összege és különbsége is racionális.

Két ilyen alakú számot összeszorozva

$$\begin{gathered}\left(a+b\sqrt{2}+c\sqrt[4]{2}+d\sqrt[4]{8}\right)\left(A+B\sqrt{2}+C\sqrt[4]{2}+D\sqrt[4]{8}\right)=\\=(Aa+2Bb+2Cd+2Dc)+(Ab+Ba+Cc+2Dd)\sqrt{2}+\\+(Ac+2Bd+Ca+2Db)\sqrt[4]{2}+(Ad+Bc+Cb+Da)\sqrt[4]{8},\end{gathered}$$

és itt az egyes zárójelekben racionális számok állnak, ha minden betű racionális számot jelent.

Azt kell még belátni, hogy két (1) alakú szám hányadosa is ilyen alakú. Ehhez elég belátni, hogy egy (1) alakú, 0-tól különböző szám reciprok értéke is (1) alakú. Valóban, ha ez igaz, akkor két (1) alakú szám hányadosa, mint a számlálónak és a nevező reciprok értékének a szorzata, felírható két (1) alakú szám szorzataként, és erről már láttuk, hogy (1) alakra hozható.

Belátjuk először is, hogy egy (1) alakú szám csak akkor 0, ha $a=b=c=d=0$. Valóban, legyen

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt[4]{2}+d\sqrt[4]{8}=\left(a+b\sqrt{2}\right)+\sqrt[4]{2}\left(c+d\sqrt{2}\right)=0.$$

Ha $c+d\sqrt{2}=0$, akkor $d=0$, s így $c=0$, mert különben $\sqrt{2}=-c/d$, racionális volna; ez esetben $a+b\sqrt{2}$ is 0, amiből hasonlóan $a=b=0$ következik. Ha $c+d\sqrt{2}\neq 0$, akkor $\sqrt[4]{2}$ kifejezve, majd a fellépő törtet bővítve $c-d\sqrt{2}$-vel, ami szintén nem 0, csak ha $c=d=0$, a következőt kapjuk:

$$\sqrt[4]{2}=-\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=-\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}-\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}=e+f\sqrt{2},$$

ahol e és f ismét racionális; négyzetre emelve

$$\sqrt{2}=e^2+2f^2+2ef\sqrt{2}.$$

Ez azonban nem lehetséges, mert ha $2ef\neq 1$, akkor

$$\sqrt{2}=\frac{e^2+2f^2}{1-2ef},$$

vagyis racionális szám volna; ha viszont $2ef=1$ volna, akkor $e^2+2f^2=0$ kellene legyen, ami azonban csak $e=f=0$ esetben áll fenn, esetünkben tehát nem állhat. Az a feltevés tehát, hogy $c+d\sqrt{2}\neq 0$, lehetetlenségre vezetett, s így egy (1) alakú szám valóban csak az $a=b=c=d=0$ esetben 0.

Legyen most a, b, c, d közül legalább az egyik 0-tól különböző. Bővítsük ez esetben $a+b\sqrt{2}+c\sqrt[4]{2}+d\sqrt[4]{8}$ reciprokát $a+b\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\left(c+d\sqrt{2}\right)$-vel. Ez nem 0, mert a, b, $-c$, $-d$ közt is van 0-tól különböző.

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\left(c+d\sqrt{2}\right)}=\frac{a+b\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\left(c+d\sqrt{2}\right)}{a^2+2b^2-4cd-\sqrt{2}\left(c^2+2d^2-2ab\right)}.$$

Itt a nevező nem 0, s így az $a^2+2b^2-4cd+\sqrt{2}\left(c^2+2d^2-2ab\right)$ szám sem. Ezzel még bővítve a törtet a nevezőben racionális szám lesz, a számláló pedig két (1) alakú szám szorzata, s így (1) alakra hozható, mint már láttuk. Osztva még a racionális nevezővel, ismét (1) alakú számot kapunk. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy $b=c=d=0$ esetén nem is szükséges bővíteni, $c=d=0$ esetén pedig elég a második típusú bővítést alkalmazni.

Makó József (Polgár, Gimnázium, IV. o. t.)
Bodnár Károly (Ózd, József A. g. IV. o. t.)
Vályi István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A 2 számról csak azt használtuk ki, hogy racionális szám és nem négyzete egyetlen racionális számnak sem. Ezért az állítás érvényes az $a+b\sqrt{n}+c\sqrt[4]{n}+d\sqrt[4]{n^3}$ alakú számokra is, ahol n racionális és nem négyzete egy racionális számnak sem.