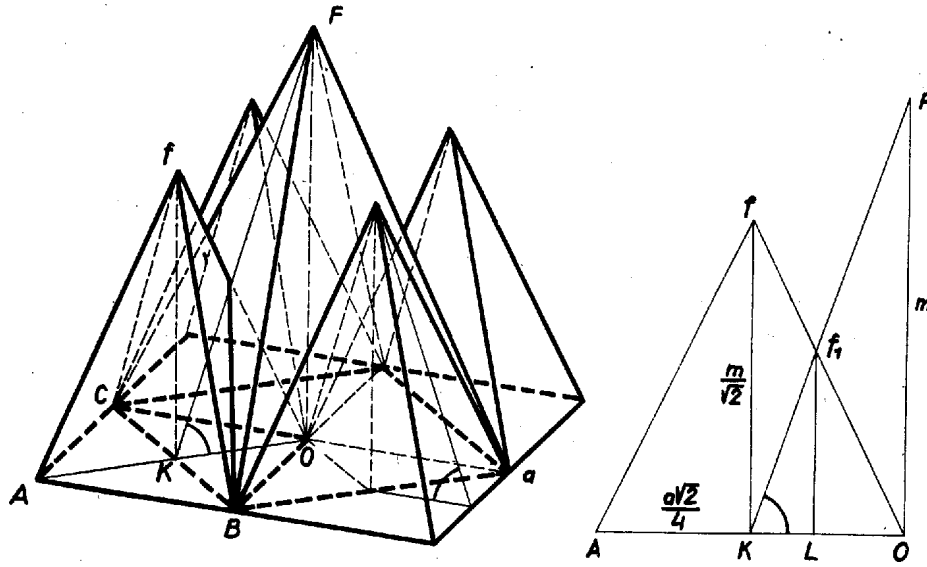


A keresett térfogat a négy kis gúla és a nagy gúla térfogatának összegénél annyival kevesebb, amennyi a nagy gúla és a kis gúla közös részének térfogata. Nyilvánvaló, hogy az alakzat szimmetrikus  $N$  oldalainak és átlóinak felező merőleges síkjára, így a négy kis gúla térfogata egyenlő, ugyanígy a 4 közös rész térfogata is.



Legyen  $N$  oldala  $a$ , ekkor a nagy gúla alapéle  $BC = a/\sqrt{2}$ , a kis gúláé  $AB = a/2$ , vagyis amannál  $\sqrt{2}$ -ször kisebb. Ugyanez az arány a két gúla magassága között, a nagy gúláét  $OF = m$ -mel jelölve a kis gúla magassága  $Kf = m/\sqrt{2}$ . Ugyanis mindkettőt metszve egyik alapélük felező merőleges síkjával, a metszetek hasonló egyenlő szárú háromszögek, mert az alapon levő szögük a feltevés szerinti hajlásszög, és a metszetháromszög alapja és magassága egyenlő az illető gúla alapélével, magasságával.

A nagy és kis gúla közös része háromoldalú gúla,  $OBC$  alapháromszögének területe a kis gúla alapterületének felével egyenlő; felső  $f_1$  csúcsát a kis gúlának az  $N$  középpontjába befutó  $fO$  oldaléléből metszi ki a nagy gúla  $BCF$  oldallapjának  $FK$  szimmetriatengelye.

Az  $f_1$  csúcs  $f_1L$  magasságát az  $AOF$  síkmetszetben keletkezett  $f_1OL$  és  $fOK$ , valamint  $f_1KL$  és  $FKO$  hasonló derékszögű háromszög-párokból és az  $OL + LK = OK$  egyenlőségből számítjuk:

$$OL = OK \cdot \frac{f_1L}{fK}, \quad LK = OK \cdot \frac{f_1L}{FO}, \quad f_1L \left( \frac{1}{fK} + \frac{1}{FO} \right) = 1,$$

$$f_1L = \frac{fK \cdot FO}{fK + FO} = \frac{m}{\sqrt{2} + 1} = m(\sqrt{2} - 1).$$

Eszert az  $OBCf_1$  közös rész  $V_k$ , majd az egész alakzat  $V$  térfogata:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} m(\sqrt{2} - 1),$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} m + \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{m}{\sqrt{2}} - 4V_k = \frac{a^2 m}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) = \frac{a^2 m}{3},$$

éppen 2-szerese a nagy gúla térfogatának, más szóval annyi, mint egy  $N$  alapú és  $FO$  magasságú gúla térfogata.

*Horváth Sándor* (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)