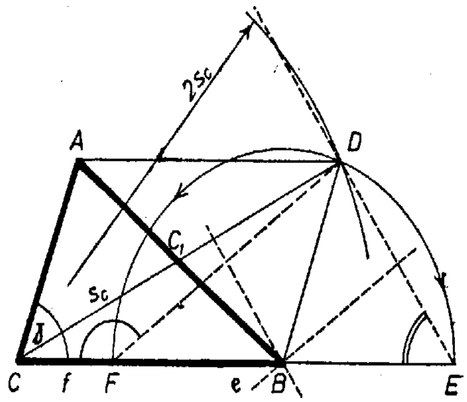
Legyen a keresett háromszög ABC, melyben $BC \geq AC$, az AB oldal felezőpontja C_1, és a C-nél levő szög, a CC_1 súlyvonal, valamint a $BC+CA$ összeg – ill. a $BC-CA$ különbség – rendre egyenlő az adott γ szöggel, az s_c, e összeg-, ill. f különbség-szakasszal. Legyen továbbá C-nek C_1-re való tükörképe D – így az $ADBC$ négyszög paralelogramma –, forgassuk rá a D pontot B körül a CB oldal B-n túli meghosszabbítására, valamint a BC oldalra, és legyen D új helyzete E, ill. F.



Ekkor $CE=CB+BE=CB+BD=CB+CA=e$, hasonlóan $CF=f$, másrészt $EBD\sphericalangle=\gamma$, $FBD\sphericalangle=180^\circ-\gamma$, így a BDE egyenlő szárú háromszögből $BED\sphericalangle=CED\sphericalangle=90^\circ-\gamma/2$, továbbá, mint az EFD derékszögű háromszög külső szöge, $CFD\sphericalangle=180^\circ-\gamma/2$.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. A $CED\sphericalangle=90^\circ-\gamma/2$, ill. $CFD\sphericalangle=180^\circ-\gamma/2$ szög egyik szárára fölmérjük $EC=e$-t, ill. $FC=f$-et, másik szárát metsszük a C körüli, $CD=2s_c$, sugarú körívvel, és az első esetben a két metszéspont közül az E-hez közelebbit vesszük D-nek; DE, ill. DF felező merőlegesével a CE egyenesen kimetsszük B helyzetét, végül B-t CD-nek C_1 felezőpontjára tükrözve kapjuk A-t.

Az ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert $ACBD$ paralelogramma, és BED, ill. BFD egyenlő szárú háromszög, ezért egyrészt $CC_1=s_c$, másrészt $CA=BD=BE$, ill. $=BF$, tehát $BC+CA=CE=e$, ill. $BC-CA=CF=f$, végül $BCA\sphericalangle=EBD\sphericalangle=\gamma$, ill. $=EBD\sphericalangle=2BFD\sphericalangle=\gamma$.

A D metszéspont az e, s_c, γ adathármasból létrejön, ha $CD=2s_c$, egyrészt kisebb $CE=e$-nél, másrészt nem kisebb, mint C-nek az ED szögszártól való $CE\cdot\sin CED\sphericalangle=e\cos\gamma/2$ távolsága:

$$e\cos\gamma/2\leq 2s_c<e. \tag{1}$$

Ennek teljesülése esetén $CDE\sphericalangle\geq 90^\circ$, B a CE szakaszon adódik, és $CB\geq BE=CA$; B és A mindig létrejön és szerkesztésük egyértelmű, tehát 1 megoldás van. Ha (1) első részében egyenlőség áll, akkor az ABC háromszög egyenlő szárúnak adódik. (D-ként a távolabbi metszéspontot véve csupán CA és CB nagyságviszonya fordul ellentétesre, $CB<AC$ lesz.)

Az f, s_c, γ adathármas esetében $CFD\sphericalangle=180^\circ-\gamma/2>90^\circ$, így D létrejön, ha

$$2s_c>f. \tag{2}$$

Ekkor B a CF szakasz meghosszabbításán adódik, tehát $CB>CA$, 1 megoldás van.

Tabiczky István (Győr, Révai M. Gimn.)

Megjegyzés. Az 1390. feladatban [1] ugyanezen adathármasokból számítással határoztuk meg a háromszög további alkotórészeit és a megoldhatóság feltételének ugyancsak (1)-et, ill. (2)-t találtuk.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 32 (1966) 155. o.