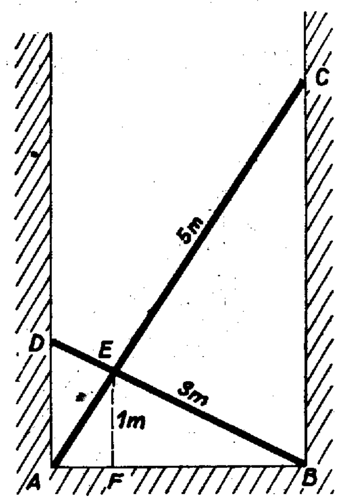


1. ábra

I. Az árok x szélességével és a rudak hosszával kifejezhetjük BC-t és AD-t. Legyen még $FE = h$, ekkor az ABC és AFE, valamint BAD és BFE hasonló háromszög-párokból

$$AF = AB \cdot \frac{FE}{BC} = \frac{xh}{\sqrt{25 - x^2}}, \qquad BF = AB \cdot \frac{FE}{AD} = \frac{xh}{\sqrt{9 - x^2}}, \tag{1}$$

ezekkel $AF + FB = AB$ alapján, majd hx-szel osztva (hiszen x és minden más említett szakasz is pozitív):

$$\frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{1}{h}. \tag{2}$$

Innen a törteket eltávolítva, négyzetre emelés után az egyetlen maradó négyzetgyökös kifejezést egyedül az egyik oldalon hagyva, végül ismét négyzetre emelve és rendezve

$$\begin{gathered} x^8 - 4\left(17 - h^2\right)x^6 + \left(1606 - 204h^2\right)x^4 - 4\left(3825 - 803h^2\right)x^2 + \\ + \left(50\,625 - 15\,300h^2 + 256h^4\right) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

és ez $h = 1$ esetén így egyszerűsödik:

$$x^8 - 64x^6 + 1402x^4 - 12\,088x^2 + 35\,581 = 0,$$

ami $x^2 = y$-ra nézve egész együtthatós negyedfokú egyenlet:

$$f(y) = y^4 - 64y^3 + 1402y^2 + 12\,088y + 35\,581 = 0. \tag{4}$$

Középiskolai ismeretekkel 2-odfokúnál magasabb fokú egyenlet gyökeinek megállapítását a racionális gyökök megkeresésével kezdjük – amennyiben minden együttható racionális (és egyáltalán van racionális gyöke az egyenletnek). (4) racionális gyöke csak egész lehet, mert a legmagasabb fokú tag együtthatója 1. Egész gyök csak a 35 581-es állandó tag osztója lehet, azaz páratlan szám, keressük $y = 4k \pm 1$ alakban:

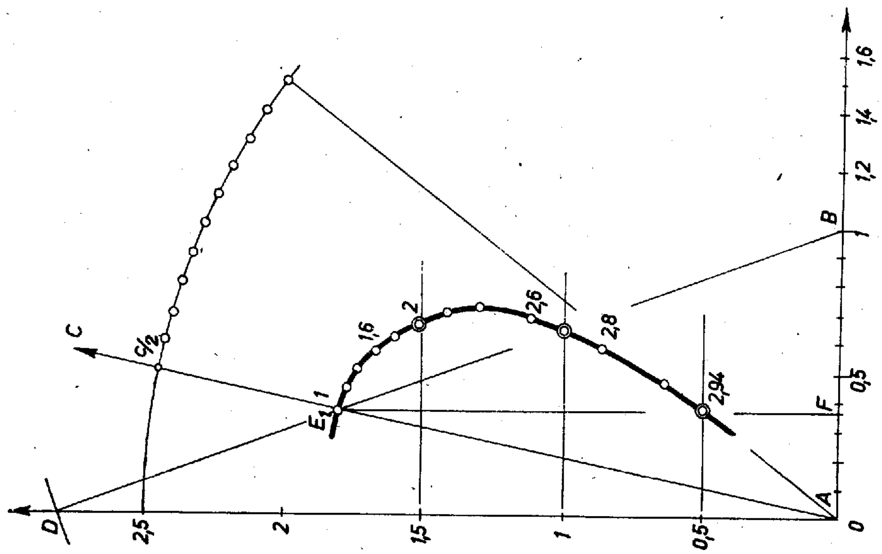
$$f\left(4k \pm 1\right) = 8\big(32k^4 - \left(512 \mp 32\right)k^3 + \left(2816 \mp 384\right)k^2 - \left(6140 \mp 1404\right)k + \left(4623 \mp 1519\right)\big).$$

Itt az alsó jelet választva a nagy zárójel utolsó tagja 6142, nem osztható 4-gyel, a többi minden k-ra osztható vele, tehát $f(4k - 1)$ nem lehet 0. A fölső jelet véve további kiemeléssel

$$f(4k + 1) = 256(k^4 - 15k^3 + 76k^2 - 148k + 97),$$

de ez sem lehet 0, egész k esetén, mert így a zárójelbeli kifejezés páratlan (páros k-ra 1, páratlanra 3 páratlan tag van a zárójelben). Így valóban csak közelítéssel tudjuk megoldani az egyenletet.

II. A tanácsolt eljárás szerint x-et megválasztva h a (2)-ből számítható, AF pedig ennek alapján (1)-ből. Célszerű a számítást táblázatban végezni a minta szerint. (A táblázatból csak kiszemelt sorokat közlünk.) Az utolsó két oszlop lényegében E koordinátáit adja az x paraméter függvényeként.



2. ábra

Ezekből E mértani helyeként egy fél-levél alakú vonal adódik. Ezt a $h = 1$ egyenes az $x = 2{,}6$ és $x = 2{,}8$ paraméterértékekhez tartozó pontok között metszi, az előbbihez valamivel közelebb. Beiktatva az $x = 2{,}7$ értéket, két tizedesre kerekítve $h = 1{,}00$ adódik, ez gyakorlati célra kielégítő pontosság, az árok 2,70 m széles.

x	$a = 9 - x^2$	$b = 16 + a$	$c = \sqrt{a}$	$d = \sqrt{b}$	$e = \dfrac{1}{c}$	$f = \dfrac{1}{d}$	$g = e + f$	$h = \dfrac{1}{g}$	AF
1,0	8,0	24,0	2,828	4,899	0,354	0,204	0,558	1,793	0,368
2,0	5,0	21,0	2,236	4,583	0,447	0,218	0,665	1,503	0,657
2,6	2,24	18,24	1,497	4,271	0,668	0,234	0,902	1,109	0,675
2,8	1,16	17,16	1,077	4,142	0,929	0,241	1,170	0,855	0,578
2,7	1,71	17,71	1,308	4,208	0,764	0,238	1,002	0,998	
2,95	0,2975	16,30	0,545	4,037	1,302	0,246	1,548	0,480	
2,94	0,3564	16,356	0,597	4,044	1,675	0,247	1,922	0,520	

Hasonlóan $h = 1{,}5$ m-hez $x = 2{,}00$ m, $h = 0{,}5$ m-hez pedig $x = 2{,}94$ m szélesség tartozik.

Ha a probléma nagyobb pontosságot igényelne, közelítő értékeinket (4), ill. (3) alapján finomíthatnánk.

Lublóy László (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)
Munk Sándor (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)
Bulkai Tamás (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Többen AF számítása nélkül értek célhoz, csak h-t ábrázolták x függvényeként.

2. Az E metszéspont pályájából szerkesztéssel is kaphatunk tetszés szerinti számú pontot. Az ábrán AD berajzolt helyzeteit 1 : 2 arányú kicsinyítés alapján rajzoltuk, az A közepű 5/2 sugarú kör $x/2$ abszcisszájú pontját kötöttük össze A-val.