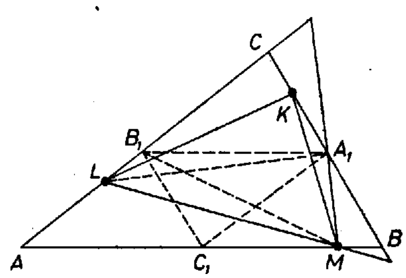
I. megoldás: Jelöljük a BC, CA, AB oldal felezőpontját A_1, B_1, C_1-gyel.



Ha a kiszemelt csúcsok közül kettő az eredeti háromszög oldalainak közös csúcsú felén van, pl. K és L a CA_1-en, ill. CB_1-en, akkor

$$t_{CKL} \leq t_{CA_1B_1} = \frac{1}{4} t_{ABC}.$$

Ha viszont K, L, M pl. rendre a CA_1, AB_1, BC_1 szakasz belsejében van, akkor belátjuk, hogy

$$t_{KLM} > \frac{1}{4}\, t_{ABC}.$$

Ebből már következik, hogy a másik három részháromszög valamelyikének területe kisebb az egész terület negyedénél, és ezt kell belátni.

Az LM egyenes a BC oldal B-n túli meghosszabbítását metszi, így a t_{KLM} csökken, ha K-t A_1-be visszük át. Hasonlóan MA_1 az AC oldal C-n túli meghosszabbítását metszi, így L-et B_1-be víve tovább csökken a középháromszög területe, a keletkező A_1B_1M háromszög területe viszont az$A_1B_1C_1$ háromszögével egyenlő, ami az ABC háromszög negyedrésze. A KLM háromszög területe tehát ennél nagyobb, amint állítottuk.

II. megoldás. Legyen $AM : AB = \mu$, $BK : BC = \varkappa$, $CL : CA = \lambda$, továbbá az ABC, MAL, KBM, LCK háromszög területe rendre t, t_a, t_b, t_c. Így a feltevés szerint μ, $\varkappa$, λ az 1-nél kisebb pozitív számok, továbbá $BM : AB = 1-\mu$, $CK : BC = 1-\varkappa$, $AL : CA = 1-\lambda$.

Az A-nál közös szöggel bíró MAL és BAC háromszögek területének aránya

$$\frac{t_a}{t} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC} = \mu(1-\lambda), \tag{1}$$

ugyanígy

$$\frac{t_b}{t} = \varkappa(1-\mu), \qquad \frac{t_c}{t} = \lambda(1-\varkappa), \tag{2}$$

és ezeket összeszorozva

$$\frac{t_a t_b t_c}{t^3} = \varkappa(1-\varkappa)\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu). \tag{3}$$

Ámde

$$0 < \varkappa(1-\varkappa) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \varkappa\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

és ugyanígy

$$0 < \lambda(1-\lambda) \leq \frac{1}{4}, \qquad 0 < \mu(1-\mu) \leq \frac{1}{4},$$

és ezeket összeszorozva kapjuk, hogy (3) bal oldala nem nagyobb $1/4^3$-nél. Ezért az (1) és (2) hányadosok közül legalább az egyik nem nagyobb 1/4-nél, tehát a feladat állítása helyes.

Bodor István (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)

Megjegyzés. Ajánljuk az érdeklődőknek a II. megoldás egybevetését az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 3. feladatára lapunkban[1] megjelent megoldásokkal.

[1] *Hajós György:* Az 1961. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása, K. M. L. 24 (1962) 98–107. o., szorosabban 101–104. o.