

α) A rendszert először a paraméterek $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ nagyságviszonyának esetére oldjuk meg. A többi eseteket erre fogjuk visszavezetni. (I) így alakul:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & (a_2 - a_1)x_2 & + (a_3 - a_1)x_3 + (a_4 - a_1)x_4 & = 1, \\ \text{(III)} \quad & (a_2 - a_1)x_1 & + (a_3 - a_2)x_3 + (a_4 - a_2)x_4 & = 1, \\ \text{(IV)} \quad & (a_3 - a_1)x_1 + (a_3 - a_2)x_2 & + (a_4 - a_3)x_4 & = 1, \\ \text{(V)} \quad & (a_4 - a_1)x_1 + (a_4 - a_2)x_2 & + (a_4 - a_3)x_3 & = 1. \end{aligned}$$

Vonjuk ki (II)-(IV) mindegyikét az utána álló egyenletből, továbbá adjuk össze az első és az utolsó egyenletet. Alkalmass kiemelésekkel:

$$\begin{aligned} \text{(III-II)} \quad & (a_2 - a_1)(x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0, \\ \text{(IV-III)} \quad & (a_3 - a_2)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = 0, \\ \text{(V-VI)} \quad & (a_4 - a_3)(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = 0, \\ \text{(II+V)} \quad & (a_4 - a_1)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2. \end{aligned}$$

Mivel a paraméterek kiemelt különbsége egyik egyenletben sem 0, velük egyszerűsíthetünk:

$$\begin{aligned} \text{(VI)} \quad & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \text{(VII)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \text{(VIII)} \quad & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \text{(IX)} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2}{a_4 - a_1}. \end{aligned}$$

Mármost (VII) és (VI), valamint (VIII) és (VII) különbségéből, továbbá (IX) és (VIII) különbségéből, illetve (VI) és (IX) összegéből

$$x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_1 = \frac{1}{a_4 - a_1}.$$

β) Legyen $a_h < a_i < a_j < a_k$, ahol h, i, j, k az 1, 2, 3, 4 indexek egy tetszés szerinti sorrendje. Az előre jelzett visszavezetést a következő helyettesítéssel hajtjuk végre. Legyen

$$\begin{aligned} a_h &= b_1, & a_i &= b_2, & a_j &= b_3, & a_k &= b_4. \\ x_h &= y_1, & x_i &= y_2, & x_j &= y_3, & x_k &= y_4. \end{aligned}$$

(I) h -edik egyenlete, a bal oldalon a tagok sorrendjére nem tekintve így írható:

$$|a_h - a_i| \cdot x_i + |a_h - a_j| \cdot x_j + |a_h - a_k| \cdot x_k = 1,$$

ezért helyére a következő lép:

$$|b_1 - b_2| \cdot y_2 + |b_1 - b_3| \cdot y_3 + |b_1 - b_4| \cdot y_4 = 1,$$

ez pedig csak abban tér el (II)-től hogy minden egyes a és x betű helyén b , ill. y áll, hiszen $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ miatt mindegyik együttható egyenlő az abszolút érték jelén belül álló különbség (-1) -szeresével. Hasonlóan (I)-nek i -edik, j -edik, k -edik egyenlete helyére rendre (III), (IV), (V) lép, a betűk mondott cseréjével, az indexek viszont mindenütt változatlanul maradnak.

Ezek szerint $a_h < a_i < a_j < a_k$ esetén (I) megoldása:

$$x_h = x_k = \frac{1}{a_k - a_h}, \quad x_i = x_j = 0.$$

Berács József (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)