**I. megoldás.** Minden a feltevés szerinti $x$-re (1) két oldala értelmezve van. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén az állítás helyes, ugyanis a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosság felhasználásával

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\,\cos x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy az állítás helyes az $n$-nek valamilyen $j$ értékére, és hogy a feltételek teljesülnek $n = j+1$-re. Ekkor teljesülnek $n = j$-re is, így fennáll

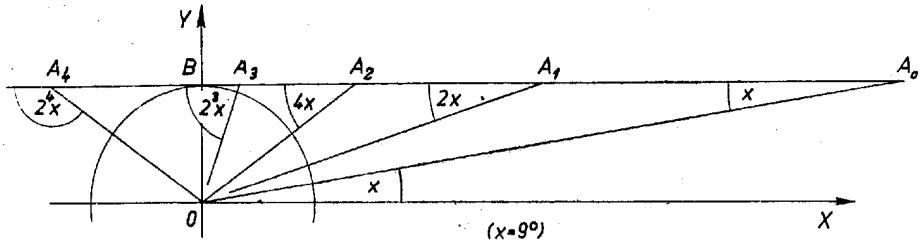
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 \cdot x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^j \cdot x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^j \cdot x. \tag{3}$$

Írjunk továbbá (2) mindkét oldalán $x$ helyén $2^j \cdot x$-et:

$$\frac{1}{\sin 2^{j+1} \cdot x} = \operatorname{ctg} 2^j \cdot x - \operatorname{ctg} 2^{j+1} \cdot x. \tag{4}$$

Itt feltevésünk szerint mind a két oldalnak van értelme. Mármost (3) és (4) összeadásával (1)-et kapjuk, $n$ helyén $j+1$-gyel, tehát (1) érvényessége bármely természetes szám esetéről átöröklődik az 1-gyel nagyobb szám esetére. – Ezzel az állítást igazoltuk.

*Sugár László* (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)




**II. megoldás**, a $0 < x < \pi/2^n$ *értékekre szorítkozva.* Mérjük föl az $x,\ 2x,\ 4x,\ \ldots,\ 2^n \cdot x$ forgásszögeket a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az $O$ origó közös csúcsuk, az $X$-tengely pozitív fele közös száruk legyen. Messe az $y = 1$ egyenes (az origó körüli egységkör érintője a $B(0;\ 1)$ pontban) a szögek másik szárát rendre az $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ pontban. Ekkor, mint ismeretes, az $A_i$ pont ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) abszcisszája $\operatorname{ctg} 2^i \cdot x$-et ábrázolja, így (1) jobb oldala az $A_0A_n$ szakasz hosszát jelenti, egyszersmind az $OA_nA_0$ háromszög területének kétszeresét, és az $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}$ pontok ebben a sorrendben rajta vannak az $A_0A_n$ szakaszon.

Az $OA_i$ szakasz hossza viszont az $OA_iB$ derékszögű háromszögből $1/\sin 2^i \cdot x$, az $OA_i$ és $OA_{i+1}$ félegyenesek közti szög $2^{i+1} \cdot x - 2^i \cdot x = 2^i x$, így az $OA_iA_{i+1}$ háromszög területének kétszerese

$$OA_i \cdot OA_{i+1} \cdot \sin A_iOA_{i+1} = \frac{1}{\sin 2^i \cdot x} \cdot \frac{1}{\sin 2^{i+1} \cdot x} \cdot \sin 2^i \cdot x = \frac{1}{\sin 2^{i+1} \cdot x}.$$

Eszerint (1) bal oldalának tagjai rendre az $OA_0A_1,\ OA_1A_2,\ \ldots,\ OA_{n-1}A_n$ háromszög területének kétszeresét jelentik, összegük pedig a feldarabolt $OA_0A$ háromszög területének kétszerese.

Ezzel (1)-et a tett korlátozás esetére bebizonyítottuk.

*Gács Pál* (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)