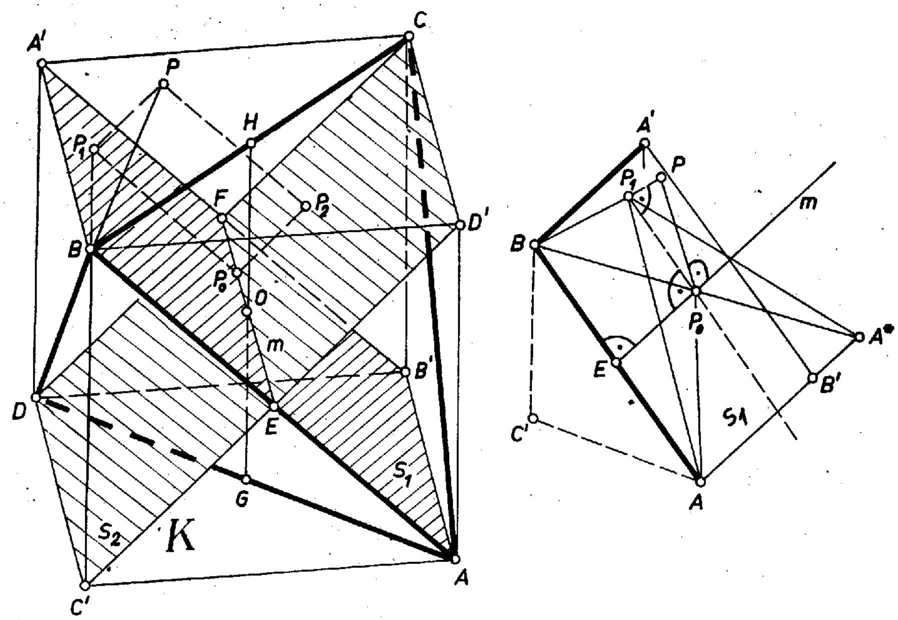
I. megoldás. Könnyen elképzelhetjük a vizsgálandó alakzatot, ha a tetraéder 4 csúcsát egy K kocka 8 csúcsa közül jelöljük ki. Valóban az 1. ábra $ABCD = T$ tetraéderének mind a 6 éle egyenlő, mert mindegyik a kocka egy lapjának átlója, tehát a tetraéder mindegyik lapja szabályos háromszög. Eszerint a T köré írt gömb azonos a K köré írt gömbbel. Legyen a középpontja O.



1. ábra

Legyen a tetszés szerinti P pont vetülete az AB él E és a CD él F felezőpontját összekötő m egyenesen P_0. Megmutatjuk, hogy P-t a P_0-ba áttolva a kérdéses távolságok összege csökken, hacsak nem P éppen azonos P_0-lal.

Legyen P vetülete az $ABF = S_1$ síkon P_1, a $CDE = S_2$ síkon P_2, ekkor

$$PA + PB \geq P_1A + P_1B \quad \text{és} \quad PC + PD \geq P_2C + P_2D, \tag{1}$$

mert pl. PA az APP_1 derékszögű háromszögben átfogó, P_1A pedig befogó. Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha – a példát továbbvíve – P rajta van S_1-en, vagyis azonos P_1-gyel. Összeadással (1)-ből

$$PA + PB + PC + PD \geq P_1A + P_1B + P_2C + P_2D, \tag{2}$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a P az S_1 és S_2 mindegyikén rajta van.

Nyilvánvaló, hogy a mondott m egyenes az S_1, S_2 síkok metszésvonala. A mondott P_0 vetület pedig egyszersmind P_1-nek és P_2-nek is vetülete m-re. Ezt – pl. P_1-re – csak akkor kell bizonyítanunk, ha P_1 nem azonos sem P-vel, sem P_0-lal. Ekkor m merőleges a PP_1P_0 síkra, hiszen m – mivel benne van S_1-ben – merőleges PP_1-re, másrészt szerkesztés folytán PP_0-ra is, ennélfogva a P_1P_0 egyenes is merőleges m-re.

m merőleges AB-re is, CD-re is, mert E és F a kocka két párhuzamos lapjának középpontja, s így m párhuzamos az AB' éllel. Eszerint m az AB és CD élek közös felező merőlegese; ezért

$$(P_1A + P_1B) + (P_2C + P_2D) \geq (P_0A + P_0B) + (P_0C + P_0D)\,. \tag{3}$$

Valóban, ha P_1 nem azonos P_0-lal, akkor véve A-nak A^* tükörképét a P_0P_1 egyenesre, A^* egyszersmind B tükörképe a P_0 pontra, és így

$$P_1A + P_1B = P_1A^* + P_1B \geq A^*B = P_0A^* + P_0B = P_0A + P_0B.$$

(2) és (3) egybevetése állításunkat igazolja. Egyenlőség mindkét lépésben akkor és csak akkor áll, ha P_1 is, P_2 is azonos P_0-lal, vagyis ha maga P azonos velük, vagyis P rajta van m-en.

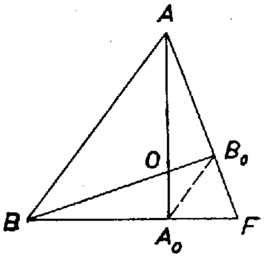
Hasonló meggondolással, P_0-t az AD, BC élpár közös GH felező merőlegesére vetítve olyan pontot kapunk, melyre nézve a T csúcsaitól mért távolságok összege ismét csökken, ill. változatlan marad. Ezzel azonban éppen O-ba jutunk, hiszen EF és GH itt metszik egymást és a kocka harmadik laptengelyét, ennélfogva további csökkentés nem lehetséges, a csúcsok O-tól mért távolságainak összege a lehetséges legkisebb érték.

Losonci Zoltán (Szeged, Vedres I. Ép. Ip. T. IV. o. t.)

II. megoldás. Fektessünk az $ABCD = T$ szabályos tetraéder minden egyes csúcsán át párhuzamos segédsíkot a szemben fekvő lappal, és legyen a tetszés szerinti P pontnak ezektől való távolsága rendre t_a, t_b, t_c, t_d. Egy pont egy sík bármely pontjától legalább annyira van, mint a síktól való távolsága, ezért $PA \geq t_a$, $\ldots$, $PD \geq t_d$. Egyenlőség mindenütt akkor és csak akkor áll, ha P rajta van azon a merőlegesen, melyet az illető csúcsban állítunk a rajta felvett segédsíkra; azaz pl. $PA = t_a$ akkor és csak akkor áll, ha PA merőleges a BCD lap síkjára, vagyis P rajta van T-nek A-ból húzott magasságegyenesén. Továbbá

$$PA + PB + PC + PD \geq t_a + t_b + t_c + t_d, \tag{4}$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha P rajta van T-nek mind a négy magasság-egyenesén, vagyis azonos T-nek O középpontjával, hiszen szabályos tetraéder magasságai – mint forgási szimmetriatengelyek – átmennek O-n.



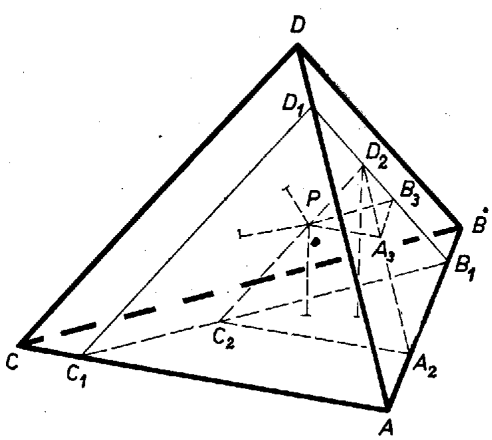
2. ábra

A négy segédsík egy újabb $A_1B_1C_1D_1 = T_1$ szabályos tetraédert határoz meg, mert pl. az A-n át felvett segédsík 3-szorosára nagyított képe a BCD síknak, O-ból mint hasonlósági középpontból úgy, hogy a megfelelő pontpárok O két oldalán vannak. Valóban, O mindegyik magasságát $1:3$ arányban osztja T-nek, mert pl. AA_0, BB_0 magasságának A_0, B_0 talppontja (2. ábra) középpontja a CDB, ill. CDA lapnak, tehát harmadolja a BF, ill. AF laptengelyt, ezért $A_0B_0 \parallel AB$, és így $OA_0 : OA = A_0B_0 : AB = FA_0 : FB = 1:3$.

Legyen egyelőre P a T_1-nek belső vagy felületi pontja, így alkalmazhatjuk a következő, alább bebizonyítandó segédtételt: *szabályos tetraéder tetszés szerinti belső vagy felületi pontjára nézve a négy laptól mért távolságok összege állandó* (egyenlő a tetraéder m_1 magasságával). Mármost O-nak T_1 lapjain levő vetülete a nagyítás miatt rendre az A, B, C, D csúcs, eszerint (4) jobb oldala egyenlő $OA + OB + OC + OD$-vel, tehát (4) éppen a feladat állítását fejezi ki.

Segédtételünk a T_1-en kívüli P pontokra is érvényes, ha negatívnak vesszük mindazoktól a lapsíkoktól mért távolságokat, amelyek a pontot elválasztják T_1 negyedik csúcsától. Állításunkban viszont a távolságok abszolút értéke szerepel. Ezt írva a negatívnak vett távolságok helyére, az összeg nagyobb lesz m_1-nél – hiszen a T_1-re nézve külső pontok 1, 2 vagy 3 lapsíknak is a negyedik csúcstól elválasztott félterében vannak –, tehát $PA + PB + PC + PD$ mindig nagyobb m_1-nél.

A segédtétel bizonyítása céljára legyen a tetraédernek a P-n átmenő, a BCD lappal párhuzamos metszete $B_1C_1D_1$, az $AB_1C_1D_1$ tetraéder ACD-vel párhuzamos metszete P-n át $A_2C_2D_2$, és az $A_2B_1C_2D_2$ tetraéder $A_2B_1C_2$-vel párhuzamos metszete P-n át A_3B_3P (3. ábra).



3. ábra

Ekkor D_2 távolsága az ABC laptól az $A_3B_3PD_2$ tetraéder magasságával több, mint az A_3B_3P sík pontjainak, pl. P-nek a távolsága ettől a síktól; az említett magasság viszont a P-ből húzott magassággal, vagyis P-nek az ABD síktól való távolságával egyenlő. Viszont D_2 távolsága az ACD és BCD síktól ugyanakkora, mint az $A_2C_2D_2$, ill. a $B_1C_1D_1$ sík bármely pontjáé, tehát mint pl. P-é. Így D_2-nek a tetraéder lapjaitól mért távolságai összege ugyanannyi, mint P távolságösszege (az ABD síktól való távolsága 0).

Hasonlóan látható, hogy a távolságösszeg nem változik D_2-ből B_1-be, majd B_1-ből A-ba menve át. A-nak viszont 3 laptól mért távolsága 0; a negyediktől mért távolsága pedig a tetraéder magassága. Ezzel segédtételünket bebizonyítottuk. Az olvasóra bízzuk annak átgondolását, hogy a bizonyítás, előjeles távolságokkal számolva, a tetraéderen kívül levő pontra is érvényes.

Vetier András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítve a segédtétel számításmentes bizonyításával.

Megjegyzések. 1. Ha P a tetraéderen kívüli pont, akkor az alábbiak szerint mindig megadható olyan T-beli pont, melyre nézve a távolságösszeg kisebb, mint P-re nézve. Legyen T-nek P-hez legközelebbi pontja Q (megkaphatjuk pl. úgy, hogy egy P körüli gömb sugarát addig növeljük – addig fújjuk fel –, amíg T-be ütközik, a beleütközési pont Q), továbbá T-nek egy tetszés szerinti, belső vagy a határon levő, Q-tól különböző pontja R. Ekkor P a QR szakasz felező merőleges síkjának azon az oldalán van, mint Q, és P-nek a QR egyenesen levő P' vetülete nem eshet a QR szakaszra, hiszen akkor P' a T belső pontja volna – mivel T konvex – és közelebb lenne P-hez, mint Q. Emiatt P' az RQ szakasz Q-n túli meghosszabbításán van, tehát

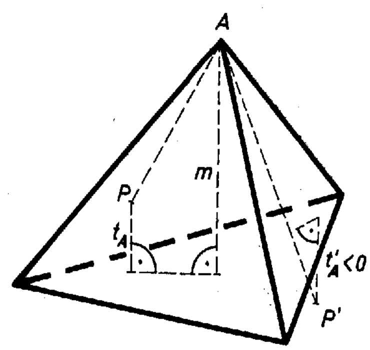
$$PR \geq P'R > QR.$$

Eszerint Q a T minden pontjához határozottan közelebb van, mint P:

$$PA + PB + PC + PD > QA + QB + QC + QD.$$

Így nincs szükség arra, hogy a segédtételt külső pontokra is bizonyítsuk.

2. A segédtételt többen is térfogatszámítási – azaz kissé távolabb álló – meggondolással bizonyították be.



4. ábra

III. megoldás. Felhasználjuk az előző megoldás segédtételét, mely szerint a P pontnak a BCD, ACD, ABD, ABC lapoktól mért (előjeles) t_A, t_B, t_C, t_D távolságainak összege független a P pont helyzetétől (4. ábra).

Adjuk ezeket a távolságokat a csúcsoktól mért távolságok összegéhez, akkor a módosított összeg ugyanakkor lesz a legkisebb, mint az eredeti: De $AP + t_A$ nagyobb, mint a tetraéder m magassága, kivéve, ha P a magasságvonalon van, amikor $AP + t_A = m$. Hasonló érvényes a $PB + t_B$, $PC + t_C$, $PD + t_D$ összegekre. Így a teljes összeg minden más pontra nagyobb, mint a magasságok metszéspontjára, ami azonos O-val.