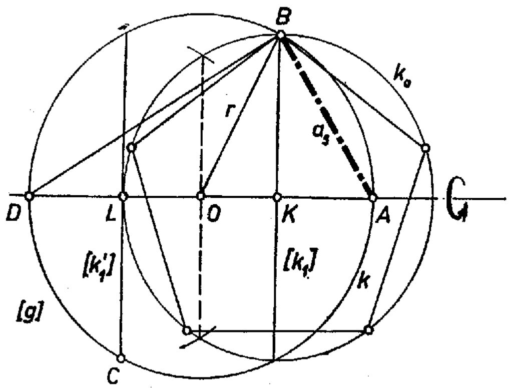
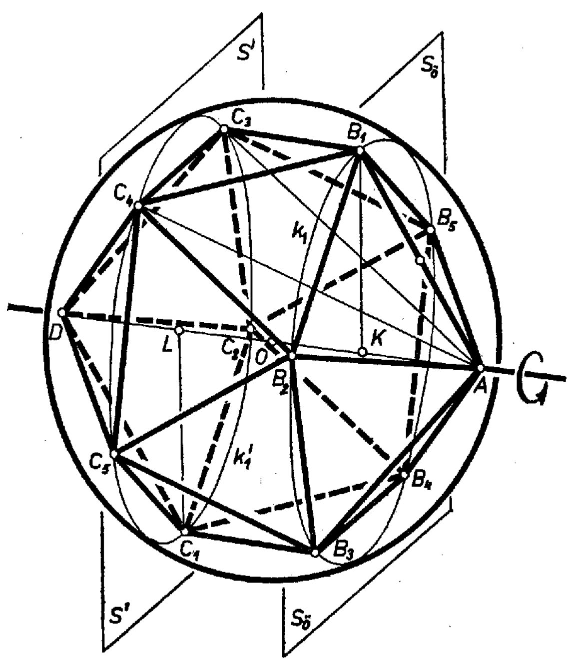
A II. elrendezés esetén a gömb sugara legalább 1 egységnyi. Ugyanis a középső síkon levő 6 ponttal meghatározott szabályos hatszög köré írt kör a gömbnek e síkkal való metszete, és e kör sugara legalább 1 egység, márpedig a gömb sugara nem lehet kisebb egy körmetszete sugaránál.

Megmutatjuk, hogy az I. elrendezés esetén a gömb sugara kisebb 1-nél; előbb azonban azt látjuk be, hogy az elrendezés megvalósítható. Ismeretes[1], hogy egy k_0 körbe írható szabályos ötszög oldalának hosszát megadja a következő szerkesztés. Vesszük k_0-nak két egymásra merőleges sugarát, KB-t és KL-et, és az utóbbinak O felezőpontja körül írt OB sugarú k körrel metsszük a KL egyenest az A pontban ($AK < AL$), ekkor a keresett hosszúság AB. (Az idézett helyen azt is láttuk, hogy k és KL másik metszéspontját D-vel jelölve BD megadja a k_0-ba írt szabályos ötszög átlóját.)



1. ábra



2. ábra

Ábránkat AO mint tengely körül forgatva k egy O középpontú g gömbfelületet ír le; B pedig egy K középpontú k_1 kört, ennek sugara KB, eszerint a k_1-be írt szabályos ötszög oldala ugyancsak AB. Legyen egy ilyen ötszög $B_1B_2B_3B_4B_5 = \ddot{O}$ (legyen pl. $B_1 = B$). Ekkor $\ddot{O}$ csúcsai és A olyan helyzetben vannak egymáshoz képest, amilyet a feladat az első 5 pontra és a 11-ik pontra előír, az adódó szabályos ötoldalú gúlának mind a 10 éle egyenlő, tehát oldallapjai szabályos háromszögek, továbbá mindegyik csúcsa rajta van g-n. A gúlát az AO tengely körül $B_1KB_2\sphericalangle = 72°$-kal akárhányszor elfordítva önmagába megy át, ezért bármelyik két szomszédos oldallapjának szöge ugyanakkora.

A második 5 pont alakzatát $\ddot{O}$ csúcsaihoz képest a kívánt helyzetben kapjuk a következők szerint. Tükrözzük az $A\ddot{O}$ gúlát az AB_1 él S felező merőleges síkjára. Ekkor a B_2 és a B_5 csúcs helyben marad, A és B_1 helyet cserél; B_3 és B_4 képét jelöljük C_4-gyel, ill. C_3-mal (2. ábra). Ezek is g-n vannak, mert AB_1 a g-nek húrja, és ezért S átmegy O-n. Forgassuk most el a gömböt AO körül 72°-kal úgy, hogy B_1 a B_2-be menjen át. Ekkor B_5 a B_1-be megy át, és így C_3 a C_4-be, mert az $AB_1B_5C_3$ tetraéder a vele egybevágó $AB_2B_1C_4$ tetraéderbe megy át, hiszen az előbbi a $B_1AB_5B_4$ képe, az utóbbi pedig a $B_1B_2AB_3$ tetraéderé, ezek pedig egybevágók.

[1]Lásd pl. az 1213. feladatban, K. M. L. 27 (1963) 18-20. old.

Legyen C_4 elforgatott képe az előbbi forgatásban C_5, C_5-é C_1 és C_1-é C_2. Ekkor C_2 72°-kal elforgatott képe ismét C_3, hiszen ez a pont származtatható C_3 5-szöri elforgatásával is.

A C_i csúcsok ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$) AO-ra merőleges, tehát $\ddot{O}$ síkjával párhuzamos S' síkban vannak, és egy $\ddot{O}$-vel egybevágó $\ddot{O}'$ szabályos ötszög csúcsai, hiszen a tükrözés miatt $C_3C_4 = B_4B_3$. Ezért $\ddot{O}'$ körülírt köre, k_1', ami g és S' metszésvonala, egybevágó k_1-gyel, sugaraik egyenlők, így S' ugyanolyan messze van O-tól; mint k_1 síkja, mert a gömb sugara és egy síkmetszet-körének sugara meghatározzák a metsző síknak a gömb középpontjától való távolságát. Eszerint k_1' a k_1-nek O-ra való tükörképe, k_1' középpontja L.

Továbbmenve mindegyik C_i pont a B_i-nek O-ra való tükörképe, mert pl. a B_1B_2 gömbi húr felező merőleges síkja merőlegesen áll k_1 és k_1' síkjára, belőlük O-ra tükrös pontpárokat metsz ki, és ezek egyike B_4 és C_4. Ezért 12-ik pontként megfelel D, ami A-nak O-ra való tükörképe, hiszen így ez ugyanolyan helyzetben van $\ddot{O}'$ csúcsaihoz képest, mint A az $\ddot{O}$ csúcsaihoz képest. Mindezek szerint az A, B_i, C_i, D pontokból álló rendszer a g gömbön van, és minden pontnak a hozzá legközelebbi pontoktól való távolsága AB (hiszen $AC_i = B_iD = B_1B_3 > B_1B_2 = AB_1$)

Legyen mármost g sugara $OB = r$ (1. ábra). Így az OBK derékszögű háromszögből $KO = KB/2$ figyelembevételével $KB = 2r/\sqrt{5}$, ebből

$$KA = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad AB = \sqrt{KA^2 + KB^2} = r\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}},$$

és $AB = 1$ lesz, ha az alakzatot úgy nagyítjuk, hogy

$$r = \sqrt{\frac{5}{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

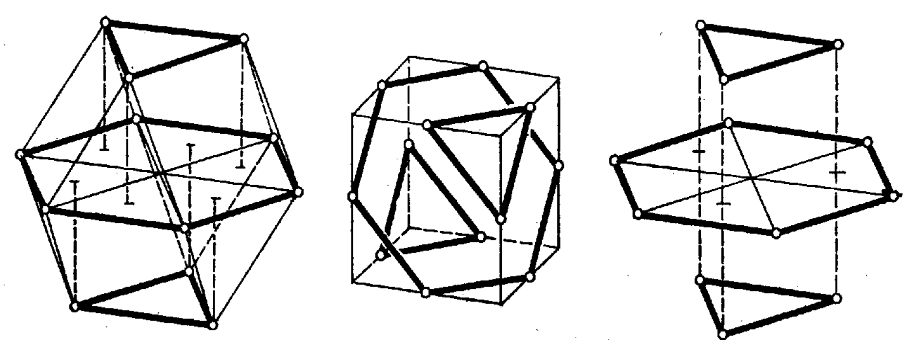
legyen. Ez pedig kisebb 1-nél, mert $\sqrt{5} < 3$. Ezt akartuk bizonyítani.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gyak. Ált. Isk. és G., 8. o. t.)
Bajmóczy Ervin (Budapest, Ady E. Ált. Isk. és G., 7. o. t.)

Megjegyzések. 1. Rövidebben jutunk célba, ha eleve elfogadjuk, hogy az I. elrendezés lehetséges úgy, hogy a két szabályos gúla oldallapjai is szabályos háromszögek, a 12 pont egy szabályos ikozaéder csúcsainak rendszere, és köréje g gömb írható. Így ugyanis bármelyik ponthoz legközelebb álló 5 pont egy síkban van, és egy szabályos ötszög csúcsait adja, pl. $B_1A = B_1B_2 = B_1C_4 = B_1C_3 = B_1B_5$ miatt A, B_2, C_4, C_3 és B_5 egy a B_1 körül B_1A sugárral írt g_1 gömbfelület pontjai, rajta vannak g és g_1 metszésvonalán, ami kör, vagyis síkidom.

Ekkor $B_1D = d$ egy ilyen szabályos ötszög átlója, $B_1A = a$ pedig oldala, AD a gömb és az AB_1D főkör átmérője, ezért az ADB_1 derékszögű háromszögből. $4r^2 = a^2 + d^2$. A II. elrendezésben viszont $4r_{\mathrm{II}}^2 \geqq a^2 + e^2$, ahol e a szabályos hatszög rövidebb átlójának hossza. Fennáll $e > d$, mert a szabályos hatszög egy szöge nagyobb a szabályos ötszögénél, ezért $r_{\mathrm{II}} > r$.

Havas János (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)



3. ábra

2. A II. elrendezés megvalósítható egységnyi sugarú gömbön. Ugyanis az egységnyi oldalú szabályos hatszöget 6 szabályos háromszögre bontva és minden második háromszögre egységnyi élű szabályos tetraédert állítva, ezek új csúcsai a hatszög síkjával párhuzamos síkban fekvő egységnyi oldalú szabályos háromszöget alkotnak. – A második szabályos háromszöget alkotó ponthármas 2-féleképpen is képezhető: a most kapottat vagy a hatszög középpontjára tükrözzük, vagy a hatszög síkjára. Az első eset elrendezése azonos egy kocka 12 él-felező pontjának rendszerével (3. ábra).

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. IV. o. t.)