I. megoldás. I. Minden az adott a, b, c helyeken a 0 értéket felvevő harmadfokú függvény a következő alakra hozható:

$$y=k(x-a)(x-b)(x-c)=k\big(x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\big), \tag{1}$$

ahol k alkalmas, 0-tól különböző állandó. Keressük egyszerűség kedvéért a függvényt ábrázoló görbe érintőjét egyelőre a tetszés szerinti x_1 abszcisszájú P_1 pontban, azután alkalmazzuk majd az eredményt a kérdéses $x_1=(a+b)/2$ esetre. P_1 ordinátája

$$y_1=k\big(x_1^3-(a+b+c)x_1^2+(ab+bc+ca)x_1-abc\big).$$

Legyen a görbe egy más, P_2 pontjának abszcisszája x_2, ekkor ordinátája

$$y_2=k\big(x_2^3-(a+b+c)x_2^2+(ab+bc+ca)x_2-abc\big),$$

és a P_1P_2 szelő iránytangense $m_{12}=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$. Forgassuk a szelőt P_1 körül úgy, hogy x_2 mind kevésbé térjen el x_1-től, ekkor a P_2 pont közeledik a görbén P_1- hez és a szelő határhelyzete az érintő lesz, arra az esetre, ha P_2 egybeesik P_1-gyel. m_{12} számlálójának k-adrésze alkalmas kiemelésekkel így alakítható:

$$\begin{aligned}\frac{y_2-y_1}{k}&=(x_2^3-x_1^3)-(a+b+c)(x_2^2-x_1^2)+(ab+bc+ca)(x_2-x_1)=\\&=(x_2-x_1)\big(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-(a+b+c)(x_2+x_1)+ab+bc+ca\big).\end{aligned}$$

Ennélfogva mindenesetre

$$m_{12}=k\big(x_2^2+x_1x_2+x_1^2-(a+b+c)(x_2+x_1)+ab+bc+ca\big),$$

a mondott határhelyzetben, mivel $x_2=x_1$,

$$m_1=k\big(3x_1^2-2(a+b+c)x_1+ab+bc+ca\big),$$

és ekkor az érintő egyenlete

$$y-y_1=m_1(x-x_1). \tag{2}$$

Könnyű belátni, hogy m_1 zárójeles kifejezése három szorzat összegévé alakítható:

$$m_1=k\big((x_1-a)(x_1-b)+(x_1-b)(x_1-c)+(x_1-c)(x_1-a)\big). \tag{3}$$

Ezzel beláttuk, hogy az $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ kifejezés $x_2=x_1$ esetén is meghatározza az (érintőbe átmenő) szelő meredekségét.

II. Írjuk most (3)-ban és (2)-ben x_1, y_1 helyére az előírt, ill. (1)-ből adódó

$$x_1=\frac{a+b}{2},\qquad y_1=k\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)$$

értékeket, így megkapjuk a kérdéses érintő egyenletét, és azt kell belátnunk, hogy ezt az $x=c$, $y=0$ pont kielégíti, vagyis hogy fennáll

$$-y_1=m_1(c-x_1). \tag{4}$$

A jobb oldal első tényezője (3) alapján így alakítható:

$$m_1=k(x_1-a)(x_1-b)+k(x_1-c)(2x_1-a-b)=k\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right),$$

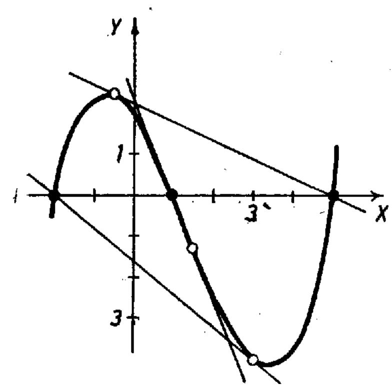
hiszen a második tag 0; vagyis m_1 egyenlő y_1 szorzat alakja első három tényezőjének szorzatával. (4) második tényezője pedig a behelyettesítéssel egyenlővé válik y_1 utolsó tényezőjének (-1)-szeresével, tehát (4) valóban teljesül. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Balogh József (Hatvan, Bajza J. G.)
Varga Gabriella (Szombathely, Savaria G.)

Megjegyzés. Az a, b, c abszcisszák nagyságviszonyáról semmit sem tételeztünk fel, ennélfogva pl. az;

$$y=0{,}2(x+2)(x-1)(x-5)$$

függvény esetében c szerepét a -2, $+1$, $+5$ zérushelyek mindegyike felveheti, vagyis e függvény grafikonjához három az állításnak megfelelő érintő húzható.

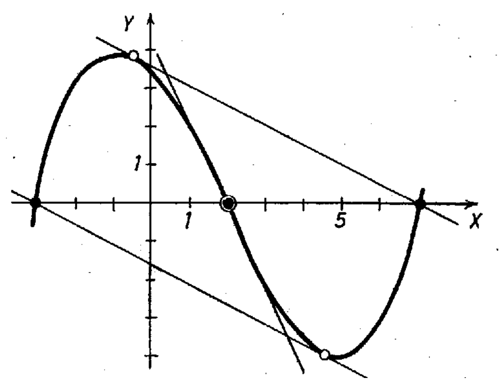


$y = 0,2(x+2)(x-1)(x-5)$

Azt sem használtuk fel, hogy a, b, c különbözők, sem azt, hogy $(a+b)/2$ és c különbözők. Pl. az

$$y = (x+3)(x-2)(x-7)/12$$

függvény esetében a középső zérushely éppen egyenlő a legkisebb és legnagyobb zérushely számtani közepével.



$y = (x+3)(x-2)(x-7)/12$

II. megoldás. Az állítás következő megfordítását bizonyítjuk: az $y = k(x-a)(x-b)(x-c)$ függvény g grafikonjának $C(c,0)$ pontjából a görbéhez húzott érintő érintési pontjának abszcisszája $(a+b)/2$. A C ponton átmenő tetszés szerinti e egyenes egyenlete $y = m(x-c)$, ahol m tetszés szerinti állandó. g és e további két metszéspontjának abszcisszája a

$$k(x-a)(x-b)(x-c) = m(x-c)$$

egyenletből adódik. Az érdektelen C metszéspontra vezető $x-c$ tényezőt mindkét oldalon elhagyva:

$$k(x-a)(x-b) = m, \quad \text{azaz} \quad kx^2 - k(a+b)x + kab - m = 0.$$

A két metszéspont x_1 és x_2 abszcisszájának számtani közepe a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján mindenesetre

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) = \frac{1}{2}\frac{k(a+b)}{k} = \frac{a+b}{2},$$

ez tehát akkor is áll, ha e-nek azt a helyzetét vesszük, amelyben $x_1 = x_2$, vagyis amikor e éppen érintő. Ekkor $(x_1+x_2)/2 = x_1 = (a+b)/2$, ezt akartuk bizonyítani.

Ebből azért következik a feladat állítása, mert a harmadfokú függvény grafikonjának minden egyes pontjában egyetlen érintője van. Láttuk ugyanis az I. megoldás (3) kifejezésében, hogy P_1-nek x_1 abszcisszája egyértelműen meghatározta az érintő iránytangensét.

Juhász Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. G.)

Megjegyzés. Itt az érintő definiciójából csak ennyit használtunk ki: olyan egyenes, melynek a görbével való metszéspontjai közül kettő egybeesik.

III. megoldás (vázlat). Messe az $y = px+q$ egyenes az $y = k(x-a)(x-b)(x-c)$ függvény grafikonját az x_1, x_2, x_3 abszcisszájú pontokban. Az abszcisszák a

(5) $$k(x-a)(x-b)(x-c) - (px+q) = 0$$

egyenlet gyökei, így összegük a harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggés alapján egyenlő az x^2 és x^3 előtt álló együtthatók hányadosának (-1)-szeresével. Ez (5) polinommá alakítása alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c.$$

Ha most azt az egyenest vesszük, amelyre $x_1 = x_2 = (a+b)/2$, akkor $x_3 = c$. És fordítva, ha $x_3 = c$, és $x_1 = x_2$, akkor $x_1 = (a+b)/2$.

Havas János (Budapest, Berzsenyi D. G.)