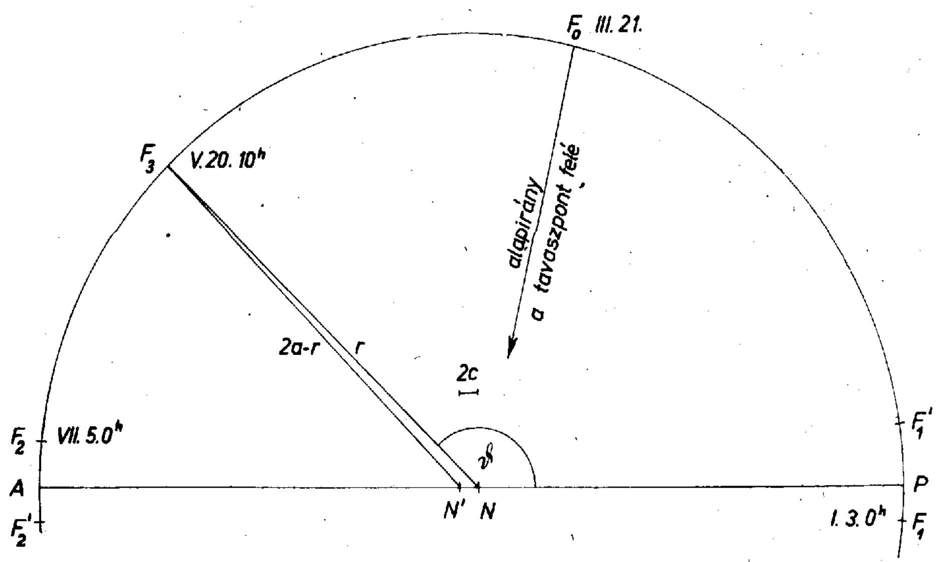
Kepler I. törvénye szerint a Föld középpontjának pályája ellipszis, melynek egyik fókuszában a (mozdulatlannak tekintett) Napközéppontja van. Így a Föld-Nap távolság az ellipszisnek a pálya megfelelő pontjához húzott vezérsugara. Ezt kell meghatároznunk az előírt időpontra.

Az adatokból megállapíthatjuk egyrészt az ellipszis nagytengelyének hosszát és fókuszainak távolságát, mert – mint majd megmutatjuk – a leghosszabb és a legrövidebb vezérsugár éppen a nagytengely két végpontjához tartozik, másrészt – a koordinátákból – a Föld szóban forgó három időpontbeli helyzetéhez a Napból húzott vezérsugarak közti szögeket. Ezek a szögek ugyanis rendre csúcsszögei azoknak a szögeknek, amelyeket a Föld ezen helyzeteiből a Nap felé mutató irányok egymással bezárnak.



Legyen P a földpálya nagytengelyének az N Naphoz közelebbi, A pedig a távolabbi végpontja (az ún. perihélium-pont, ill. aphelium-pont), F_1, F_2, F_3 a Föld helyzete rendre jan. 3-án 0^{h}-kor, júl. 5-én 0^{h}-kor, ill. máj. 20-án 9^{h} 45^{m}-kor (amikor a Nap és Hold ekliptikai hosszúsága egyenlő[1]), továbbá a földpálya másik fókusza N'. Az F_1 helyzet nem mondható azonosnak P-vel, sem az F_2 az A-val, mert csak azt tudjuk, hogy a Föld P-n, A-n valamikor az illető nap folyamán halad át. Ekkor a szokásos jelölésekkel a nagytengely $PA = NP + NA = 2a$, a fókuszok egymástól való távolsága $NN' = NA - N'A = NA - NP = 2c$. Legyen továbbá $NF_3 = r$ és $PNF_3\sphericalangle = \vartheta$ így $N'F_3 = 2a - r$, és az $NN'F_3$ háromszögből a koszinusz-tétel alapján

$$N'F_3^2 = (2a-r)^2 = 4c^2 + r^2 + 4cr\cos\vartheta,$$

$$r = \frac{a^2-c^2}{a+c\cos\vartheta} = \frac{(a-c)(a+c)}{a+c(1-2\sin^2\vartheta/2)} = \frac{NP\cdot NA}{NA-(NA-NP)\sin^2\vartheta/2}. \tag{1}$$

(Innen látjuk, hogy NP, valóban a legkisebb vezérsugár. Amikor ugyanis a Föld P-ben van, $\vartheta = 0°$, és a nevező a legnagyobb értékét veszi fel, mert kivonandó tagja 0, és $r = NP$. Hasonlóan $\vartheta = 180°$ esetén a kivonandó a legnagyobb, a nevező a legkisebb, r a legnagyobb értékét veszi fel, és ez NA.)

ϑ-ra a hosszúsági adatokból csak közelítő értékeket kapunk, emiatt a szögmásodperceket mindjárt figyelmen kívül hagyjuk; számításba vételüket függvénytáblázatunk négyjegyű volta is fölöslegessé teszi. A $PNF_3\sphericalangle$ helyett a nagyobb $F_1NF_3\sphericalangle$-et véve $(360° + 58°56') - 282°10' = 136°46'$ felső korlát adódik[2], ha pedig az ANF_3 kiegészítő szög helyett a kisebb $F_2NF_3 = 102°32' - 58°56' = 43°36'$ szöget vonjuk ki $180°$-ból, akkor $136°24'$, és ez is felső korlát; a kettőt egybevetve $\vartheta \leqq 136°24'$ (az ábrán F_1, P, F_1', valamint F_2, A, F_2' kölcsönös helyzete torzított).

Másrészt alsó korlátokat kapunk ϑ-ra abból, hogy az NF vezérsugár egy évi, azaz 365, 25 napi $360°$ elfordulásából egy napra kereken $1°$ elfordulás esik, így jan. 4-én 0^{h}-kor, F_1'-ben $283°10'$, júl. 6-án 0^{h}-kor, F_2'-ben $103°32'$ vehető longitúdónak, és ezekből a fentiekhez hasonlóan $\vartheta > 135°46'$, ill. $\vartheta > 135°24'$. Egybevetve $135°46' < \vartheta \leq 136°24'$, $67°53' < \vartheta/2 \leq 68°12'$.

Most már (1) nevezőjének legnagyobb értéke (az alsó korlátból), millió km egységben

$$152{,}006 - 5{,}004 \cdot 0{,}8582 = 147{,}712,$$

[1] Lásd az 1459. feladatban; pontosabban 9^{h} 42^{m} 44^{s}-kor. K. M. L. 34 (1967) 212. o.

[2] Ugyanis F_1 és F_3 között a Föld átlépi pályájának azt a pontját, amelyből nézve a Nap longitúdóját $0°$-nak vesszük: márc. 21-én, amikor a földi (és égi) egyenlítő síkja áttolódik a Napon.

és legkisebb értéke hasonlóan 147,692. Ezek szerint ϑ közelítő megadása ellenére r számítható 5 értékes számjegyre: $151{,}28 < r < 151{,}30$.

Kádas Sándor (Budapest, József A. Gimn.)
Zöldy Béla (Budapest, I. István Gimn.)

Megjegyzések. 1. Az ANF_3 kiegészítő szögből számított $\vartheta \leq 136°24'$ felső korlátra vezet annak figyelembevétele is, hogy a Föld a pálya PF_3A fél-ívét fél év, vagyis 182 nap 15 óra alatt teszi meg. Július 5-én 0^{h}-ig, ami A elérésének legkorábbi lehetséges időpontja, az évből 185 nap telik el, ezért P elérésének legkorábbi lehetséges időpontjáig 2 nap 9 óra telik el, vagyis P-n jan. 3-án 9^{h}-kor haladhat át legkorábban a Föld. E 9 óra alatti elfordulás kb. $0°22'$, így P longitudója legalább $282°32'$, $\vartheta \leq (360° + 58°56') - 282°32' = 136°24'$.

Csirmaz László (Budapest, I. István Gimn.)

2. Felhasználva az ellipszis ún. p paraméterét, vagyis a fókuszon átmenő és a nagytengelyre merőleges húr hosszának felét, ami

$$|y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\text{-ből } |x| = c \text{ helyettesítéssel } p = \frac{b^2}{a},$$

valamint a $c/a = e$ ún. *numerikus excentricitást*, (1) így alakítható:

$$r = \frac{b^2}{a + c\ \cos\vartheta} = \frac{p}{1 + e\ \cos\vartheta}.$$

Ez az ellipszis egyenlete abban a polárkoordináta-rendszerben, melynek pólusa az egyik fókusz, tengelye pedig az a félegyenes, mely innen a nagytengely közelebbi végpontjába irányul. (Ha a polártengely a nagytengely távolabbi végpontjába irányul, akkor a nevező természetesen $1 - e\cos\vartheta$.)

3. Az adatok szerint $a = 149{,}504 \cdot 10^6$ km; $b^2 = a^2 - c^2 = NA \cdot NP$ alapján $b = 149{,}483 \cdot 10^6$ km, (a-nál annak kb. 7000-edrészével kisebb), ezekből az ellipszis területe $ab\pi = 7{,}02093 \cdot 10^{16}$ km^2. Kepler II. törvénye alapján a vezérsugár által 1 nap alatt súrolt terület $t = ab\pi/365{,}25 = 1{,}9222 \cdot 10^{14}$ km^2. A jan. 3-i pályaívnek N-beli, ívmértékben vett látószögét α-val jelölve az $NP^2 \cdot \alpha/2 = t$ egyenletből, fokra átszámítva $\alpha = 1°1'10''$, és hasonlóan júl. 5-én $2t/NA^2 = 0°57'12''$ a vezérsugár elfordulása (máj. 20-án $57'45''$, lásd 1459. feladat).