I. megoldás. I. Jelöljük a hét 1-essel leírt $(10^7-1)/9$ számot h-val. Így

$$ABAC\cdot AFG = DDDDDDD = D\cdot h, \tag{1}$$
$$ABAC\cdot CHB = A\cdot h, \tag{2}$$
$$ABAC\cdot FJF = E\cdot h, \tag{3}$$
$$ABAC\cdot DEC = J\cdot h. \tag{4}$$

Szokás szerint feltesszük, hogy különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek, és egyik szám első jegye sem 0. Az (1)–(4) egyenlőségekben ekkor az A, B, C, D, E, F, G, J jegyek egyike sem lehet 0 vagy 5. Ugyanis az A, C, D, E, F, J mint kezdő jegyek nem 0-k, de B és G sem, mert akkor A, ill. D is 0 volna. Nem végződhetnek a tényezők 5-re sem, mert különben vagy két különböző betű (egy tényező és a szorzat utolsó jegye) megegyezne (5 volna), vagy a szorzat 0-ra végződne, de láttuk, hogy A, D, E, J nem 0; ekkor természetesen a szorzat utolsó jegye sem lehet 5.

Belátjuk, hogy $A<C$. Ugyanis $A>C$ esetén (2) bal oldalán $CHB<A\cdot 10^2$, $ABAC<(A+1)\cdot 10^3$, ezért

$$(A+1)\cdot 10^3\cdot A\cdot 10^2 = A(A+1)\cdot 10^5 > A\cdot h = A\cdot\frac{10^7-1}{9},$$
$$9(A+1)\cdot 10^5 \geqq 10^7, \qquad A+1\geqq 10^2/9>11,$$

ami lehetetlen, hiszen $A\leqq 9$.

Emiatt (2)-ben nagyobb számról van szó, mint (1)-ben, tehát $A>D$, így pedig (4) és (1) hasonló összehasonlításából $J<D$.

(2) miatt $B>A$. Ugyanis $B<A$ esetén az $AAAAAAA : ABAC$ hányados négyjegyű lenne. Ezt a fentiekből összefoglalt

$$J<D<A<C \tag{5}$$

eredménnyel egybevetve legalább négy J-nél nagyobb, 5-től különböző számjegy van, tehát $J\leqq 4$. Továbbá J a (4) szerint négyzetvégződés, ezért értéke csak 1 vagy 4 lehet. Ámde $J=4$ esetén C értéke 2 vagy 8 lenne, és mindkettő lehetetlen. Ugyanis az első esetben $C<J$ adódik (5)-tel szemben, a másodikban pedig (5) csak a $D=6$, $A=7$ értékpárral teljesülhetne, holott $C=8$ esetén (2) miatt A páros. – Így $J=1$, és C^2 végződése miatt $C=9$.

(5)-ből $A\geqq 3$, és $D\geqq 2$. De $A=3$ esetén (1) bal oldala kisebb lenne $4\cdot 103\cdot 4\cdot 10^2=16\cdot 10^5$-nél, amiből $D<2$ következnék. Ezért $A\geqq 4$ és $B\geqq 6$.

Másrészt $B\neq 7$ és $B\neq 8$, mert így (2)-ből A, mint a $C\cdot B=9B$ szorzat utolsó számjegye, 3, ill. 2 lenne. Ezért $B=6$, (2)-ből $A=4$, és a szorzandó $ABAC=4649$.

Ennélfogva (1) bal oldala kisebb $5\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^2=2{,}5\cdot 10^6$-nál, $D=2$, egyszersmind ez a $C\cdot G=9G$ szorzat végződése, tehát $G=8$.

Most már E és F értéke csak 3 és 7 közül választható. (3) miatt $E<F$, ezért csak $E=3$, $F=7$ lehet. Ezekkel (1), (3) és (4) valóban teljesül, (2)-ből pedig $H=5$ adódik, tehát (1)–(4)-ben a szorzó rendre $478,\ 956,\ 717,\ 239$.

II. A fentiek szerint az $ABAC=N$ szám osztója h-nak – hiszen (1) szerint osztója $2h$-nak, de N páratlan –, így pedig a $9h=10^7-1$ számnak is osztója, más szóval $10^7=N\cdot P+1$, ahol P egész szám. Ezért

$$\frac{1}{N}=\frac{P}{10^7}+\frac{1}{10^7N},$$

vagyis az $1:N$ osztásban P utolsó jegyének megállapítása után a maradék 1, innen kezdve az eddigi osztási maradékok periodikusan ismétlődnek, $1/N$ tizedes tört alakja szakaszos, a szakasz hossza legföljebb 7 számjegy.

Nem lehet azonban a szakasz s hossza 7-nél kisebb szám, mert ekkor $s>1$ esetén s valamelyik többszöröse lenne 7, ami lehetetlen, mert 7 prímszám. $s=1$ hosszúságú szakasz esetén pedig az osztásban csak egyféle maradék léphetne fel, holott az $1/N$ osztás első két maradéka 1 és 10, különbözők. Így az $1/N$ osztás szakasza hétjegyű; (4) alapján

$$\frac{1}{ABAC}=\frac{DEC}{J\cdot h}=\frac{239}{1\,111\,111}=\frac{2151}{9\,999\,999}=0,\dot{0}00\,215\dot{1}.$$

(Valóban, az első szakasz kivonásával a tört $1/10^7$ részét kapjuk:

$$\left(\frac{2151}{9\,999\,999}-0,000\,2151=\frac{2151}{9\,999\,999}\cdot 10^{-7}.\right)$$

Barcza Gyöngyi (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
Losonci Zoltán (Szeged, Vedres I. ép. ip. t. III. o. t.)

II. megoldás *a feladat első kérdésére.* Gyorsan célhoz érünk, ha valahonnét ismerjük az 1 111 111 szám következő szorzat–előállítását: $4649\cdot 239$, és azt is tudjuk, hogy itt mindkét tényező prímszám. Így 4649 csak az $ABAC$ tényező osztója lehet, $ABAC$ értéke 4649 vagy 9298. Az utóbbi azonban lehetetlen, mert már a 110-szerese is 8-jegyű, tehát $A=4$, $B=6$, $C=9$. Másrészt most már a szorzók csak a 239-es tényezőnek 3-jegyű többszörösei lehetnek. Ilyen csak négy van: 239, 478, 717 és 956. Ezek összeegyeztethetők a már meglevő jegyekkel $239=DEC$, $478=AFG$, $956=CHB$, végül $FJF=717$, így mind a négy egyenlőség teljesül és más megoldás nem lehetséges.

Szeredi Péter (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. $J=1$ megállapítása után próbálgatással kereshetjük, hogy az $FJF=F1F$ szorzó az F mely értéke esetén osztója h-nak, vagy valamelyik 10-en aluli többszörösének. $F=2$ esetén $212=4\cdot 53$, ezért csak $4h$-t és $8h$-t kell próbálni, de nem áll fenn oszthatóság; 313 prímszám, és nem osztója h-nak, $414=2\cdot 3^2\cdot 23$, de $2\cdot 3^2h$ már 8-jegyű; 515 nem jön szóba; $616=11\cdot 56$, de 11 nem osztója h-nak, viszont $11h$ már 8-jegyű. Végül a 717-tel való próba rövid úton célhoz vezet.

Herényi István (Budapest, I. István g. IV. o. t)