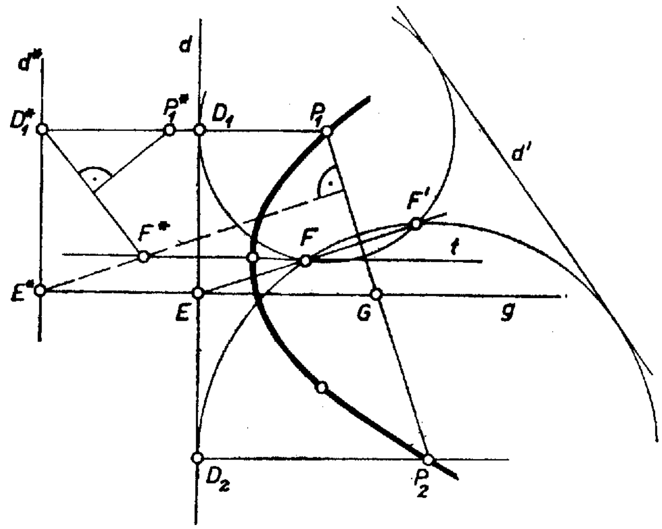
I. megoldás. *a)* és *b) eset.* A parabola definíciója így is fogalmazható: a parabola azon körök középpontjaiból áll, amelyek átmennek az F fókuszon és érintik a d vezéregyenest. Adott P_1 és P_2 pontjaink körül megrajzolhatjuk ezt a kört, akár F, akár d adott a felsorolt három elem közül (1. ábra), és ekkor az *a)* esetben d lehetséges helyzeteit a két kör külső közös érintői adják, a *b)* esetben pedig F lehetséges helyzeteit a két kör közös pontjai, végül a tengely mindig az F-en átmenő, d-re merőleges egyenes lesz.



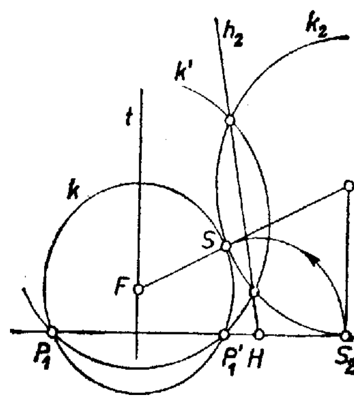
1. ábra

Az *a)* esetben csak akkor nincs megoldás, ha a két kör F-ben éppen érinti egymást, és egyikük benne van a másikban, azaz ha F, P_1, P_2 ebben a sorrendben egy egyenesen van, hiszen P_1P_2 húrja a parabolának és F csak belső pont lehet. Minden más helyzet esetén nyilvánvalóan 2 közös érintője van a köröknek.

A *b)* esetben már eleve látható, hogy nincs megoldás, ha d szétválasztja P_1-et és P_2-t, vagy ha pl. P_1 a d-n van. Egyébként 2 megoldás van vagy nincs megoldás aszerint, hogy a két körnek van 2 különböző közös pontja, vagy nincs közös pontjuk. Külső érintkezésük esetén 1 megoldás van; belső érintkezésük esetén viszont nincs megoldás, mert így egyetlen közös pontjuk d-n volna, és a fókusz a vezéregyenesre esne; ez a helyzet akkor állna be, ha $P_1P_2 \perp d$, a P_1P_2 húr párhuzamos lenne a tengellyel, ez pedig lehetetlen.

c) eset. Feltehetjük, hogy P_1 és P_2 a t tengely két partján van, éspedig P_2 távolabb van t-től, mint P_1, mert a parabola szimmetrikus t-re, a pontok P_1', P_2' tükörképe is a parabolán van, így P_1P_2 nem lehet sem párhuzamos t-vel, sem merőleges rá.

Amennyiben P_1 rajta van t-n, akkor ez a parabola C csúcsa, és az itt t-re állított c merőleges a csúcsérintő, ennek ismert tulajdonságai alapján könnyen célba jutunk: P_2-nek c-n levő vetületét Q_2-vel, a P_1Q_2 szakasz felezőpontját R_2-vel jelölve a P_2R_2-re R_2-ben állított merőleges t-ből az F-et, a P_2Q_2 egyenesből pedig a d-vel való metszéspontját metszi ki. (Ezután P_1 nem lehet a t-n.)



2. ábra

P_2-nek a P_1P_1' egyenesen levő S_2 vetületéről való távolsága megadja, mennyivel van távolabb d-től P_2, mint P_1 (2. ábra, könnyű ugyanis belátni, hogy a tengelytől távolabbi P_2 pont d-től is távolabb van, mint P_1), így a definíció alapján P_2 és P_1 vezérsugarainak különbségét is megadja: $P_2F - P_1F = P_2S_2$. Eszerint az F körül FP_1 sugárral írt k kör kívülről érinti a P_2 körül P_2S_2 sugárral írt k_2 kört. Ezzel F megszerkesztését visszavezettük a P_1, P_1' pontokon átmenő és a k_2 kört kívülről érintő k kör megszerkesztésére. Ezt az 1406. feladat I. megoldásában[1] láttuk. Itt P_1,

[1]Lásd K. M. L. 33 (1966) 55. o.

P_1' a k_2-re nézve külső pontok (egyik sem azonos S_2-vel), ezért k csak kívülről érintheti k_2-t. A szerkesztést az ábra mutatja. Ez valamivel egyszerűbb az idézett helyen leírtnál, hiszen a H-ból k_2-höz húzható érintő hossza már ismeretes: a HS_2 szakasz. (A várható második k kör elfajult a P_1P_1' egyenessé.) Ezután d-t az *a)* eset szerint szerkeszthetjük. (Az olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy az adódó közös érintők egyike merőleges t-re.)

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
Szabó Klára (Esztergom, Dobó Katalin g. III. o. t.)

Megjegyzés. Többen a szerkesztést így vélték befejezni: „megszerkesztem azt a hiperbolát, melynek fókuszai P_1, P_2, és valós tengelyének hossza a P_2S_2 szakasz, ez metszi ki t-ből F-et." – Ez helytelen. Az adatokból a hiperbolának tetszés szerinti – de csak véges – számú pontja szerkeszthető meg. Éppen fordítva, ha valahol hiperbola és egyenes metszéspontjának megszerkesztése a feladat, ezt a fenti vagy más efféle szerkesztéssel szokás végrehajtani.

A további megoldásokban csak a *c)* esettel foglalkozunk, és ebben is az adott pontokat t-n kívülieknek vesszük

II. megoldás. Messe a P_1 és P_2 körüli, F-en átmenő körök metszéspontjait összekötő egyenes (ill. érintkezésük esetén a közös belső érintőjük) d-t az E pontban (1. ábra). E felezi a köröknek d-n levő D_1, D_2 érintési pontjai közti szakaszt, hiszen $ED_1^2 = EF \cdot EF' = ED_2^2$. Eszerint E rajta van a P_1P_2 szakasz G felezőpontján átmenő, és a t-vel párhuzamos g egyenesen is. Másrészt EF merőleges P_1P_2-re, mint a körök centrálisára, továbbá FD_1 felező merőlegese átmegy P_1-en.

Ezek alapján F-et és E-t a következőképpen szerkeszthetjük. A P_1-en át t-vel párhuzamosan húzott egyenes tetszés szerinti D_1^* pontjában állított merőleges messe g-t E^*-ban, az E^*-ból P_1P_2-re bocsátott merőleges t-t F^*-ban, $D_1^*F^*$ felező merőlegese $D_1^*P_1$-et P_1^*-ban. F^*-ból t-re és E^*-ból g-re $P_1^*P_1$-gyel egyenlő és egyirányú szakaszt mérve, megkapjuk F-et és E-t, végül az E-ből t-re állított merőleges adja d-t.

Joó István (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentiekben a következő tételt találtuk: *a parabola bármely húrjára a fókuszból állított merőleges átmegy a húr felezőpontjának a vezéregyenesen levő vetületén.*

III. megoldás. Megszerkesztjük a parabola C csúcsának helyzetét és p paraméterének hosszát. Ekkor C-től t-n mindkét irányba $p/2$ szakaszt fölmérve F-et, ill. d-nek tengelypontját kapjuk. (F az, amely közelebb van P_1-hez.) A koordináta- geometria eljárásait használjuk, origónak (a még ismeretlen) C-t, X-tengelynek t-t vesszük, így a parabola egyenlete $y^2 = 2px$; P_i koordinátái legyenek (x_i, y_i), $i = 1, 2$, ahol föntebbi megállapodásainkat fenntartva $x_2 > x_1 > 0$, és $y_2 > 0$. Így a P_1P_2 egyenes α irányszöge pozitív hegyes szög (3. ábra), és

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (y_2 - y_1) : \left(\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}\right) = \frac{p}{(y_1 + y_2)/2},$$
$$p = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Eszerint a P_1P_2 húr M felezőpontján át a húrra és a tengelyre állított merőlegesek közé a tengelyből p hosszúságú szakasz esik, hiszen a keletkező derékszögű háromszögben a két merőleges közti szög α, és a t-re merőleges befogó M ordinátája: $(y_1 + y_2)/2$ (ami > 0).

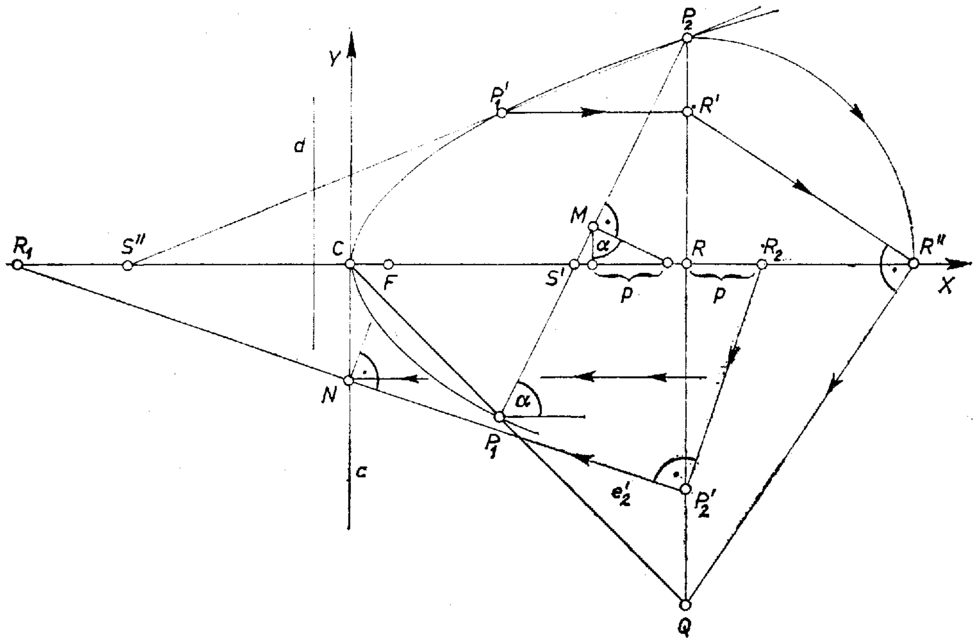
A CP_1 egyenes és a P_2 -n át t-re állított RP_2 merőleges Q metszéspontjának ordinátája

$$RQ = \frac{y_1}{x_1} \cdot x_2 = y_1 \cdot \frac{y_2^2}{y_1^2} = \frac{y_2^2}{y_1},$$

ebből Q megszerkeszthető (lásd P_1', R', R''), és QP_1 kimetszi t-ből C-t.

Megjegyzések. 1. Számos más szerkesztés található a dolgozatokban p és x_i hosszának előállítására, többnyire az ún. negyedik arányos, ritkábban a derékszögű háromszögben középarányos szerkesztése, vagy Pitagorasz tétele alapján. Gyakori a segédábra használata, ilyen után a megszerkesztett szakaszt még át kell mérni a kellő helyzetbe. Többen a parabola egyenletét $y = x^2$ alakban használták és megszerkesztették az egységszakasz hosszát, ami lényegében p szerkesztése, hiszen itt $p = 1/2$.

2. C-t a p fölhasználásával is szerkeszthetjük. Ismeretes, hogy a parabola érintője a csúcsérintőből fele akkora szakaszt metsz le, mint az érintési pontnak a tengelytől való távolsága. Ezt a P_2' pontra alkalmazva a 3. ábrán $CN = RP_2'/2$, és továbbmenve azt kapjuk, hogy az érintő t-t az R pontnak C-re vett R_1 tükörképében metszi, azaz $RR_1 = 2x_2 = y_2^2/p$. Eszerint R_1 az iménti eljáráshoz hasonlóan megkapható: $RR_2 = p$-t fölmérve t-re (úgy, hogy $R_2P_1 > RP_1$ legyen) az R_2P_2'-re P_2'-ben állított merőleges t-ből kimetszi R_1-et, és ekkor RR_1 felezőpontja C.



3. ábra

Eljárásunk egyszerűsíthető, észrevéve, hogy R_1-et éppen a P_2'-beli e_2' érintővel metszettük ki, hiszen így RP_2' felező merőlegese N-ben metszi e_2'-t, R_1 előállítása mellőzhető, N vetülete C. – Ekkor F-et az e_2'-re N-ben emelt merőleges (ami $||R_2P_2'$) is kimetszheti t-ből.

Bottyán István (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

3. Még egyszerűbb C szerkesztésére a következő eljárás. A P_1P_2 szelő egyenlete $2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$, innen a szelő és a tengely S' metszéspontjának abszcisszája $y=0$ helyettesítéssel $x'=-y_1y_2/2p$. Ebből a $P_1'P_2$ szelő S'' metszéspontjára nézve, y_1 helyére a negatívját írva $x''=-x'$. Eszerint C a tengelyből a P_1P_2 és $P_1'P_2$ egyenesek közé eső $S'S''$ szakasz felezőpontja.