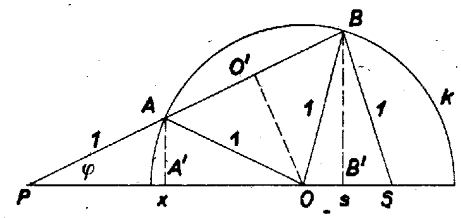
I. megoldás. *a)* Az ábrát az alábbiak szerint kapjuk az O középpontú, $r=1$ sugarú k körből és az alkalmas P külső pontból kiindulva.



Legyen k és a P körüli, 1 sugarú kör egyik metszéspontja A, messe a PA egyenes k-t másodszor B-ben úgy, hogy $PB>PA$, végül messe a B körüli, 1 sugarú kör a PO szakasz O-n túli meghosszabbítását S-ben. Így POA, OSB és ABO egyenlő szárú háromszögek. Legyen még A, B és O vetülete PO-ra, ill. PA-ra rendre A', B', O', továbbá $AB=y$; ekkor $PO'/PO=PA'/PA=PB'/PB$, azaz

$$\frac{1+y/2}{x}=\frac{x}{2}=\frac{x+s/2}{1+y},$$

mert a POO', PAA' és PBB' derékszögű háromszögek nyilvánvalóan hasonlók. Az első két hányados egyenlőségéből

(2) $$y=x^2-2,$$

ezt az utolsó két hányados egyenlőségébe helyettesítve rendezés után (1)-et kapjuk.

B-re addig teljesül $PB>PA$, míg PAO tompaszög, azaz míg $OAB\sphericalangle=2\cdot OPA\sphericalangle=2\varphi<90^\circ$, továbbá S-re addig teljesül $PS>PO$, míg $BOS\sphericalangle=BPS\sphericalangle+PBO\sphericalangle=3\varphi<90^\circ$, egybevetve, míg $\varphi<30^\circ$.

b) A φ szög értéke egyértelműen meghatározza az ábrát, s így x és s értékét is. Az adott φ értékek mellett – amelyekre teljesül a $\varphi<30^\circ$ feltétel – valamelyik meghatározására nyerhetünk (1)-ből egyenletet.

$\varphi=180^\circ/7$ esetén $BSP\sphericalangle=BOS\sphericalangle=3\varphi$, és $PBS\sphericalangle=180^\circ-P\sphericalangle-BSP\sphericalangle=3\varphi$, a PBS háromszög egyenlő szárú, $x+s=1+y$, (2) alapján

(3) $$s=x^2-x-1,$$

és (1), így alakul:

$$x^3-x^2-2x+1=0.$$

s-et most már számíthatjuk akár (1)-ből, akár (3)-ból, de kezdhetjük ennek kiszámításával is, ugyanis az SPB és SBO egyenlő szárú háromszögek hasonlók, mert S-nél levő szögük közös. Így

$$x+s=\frac{SP}{SB}=\frac{SB}{SO}=\frac{1}{s},\quad \text{azaz}\quad x=\frac{1}{s}-s.$$

Ezt (1)-be írva, s^3-nel végigszorozva az egyenletet és rendezve

$$s^6-5s^4+6s^2-1=0.$$

c) $\varphi=20^\circ$ esetén $SOB\sphericalangle=60^\circ$, tehát $s=1$, x-re pedig (1)-ből az

$$x^3-3x-1=0$$

egyenlet adódik.

Domokos László (Tatabánya, Árpád G.)
Szeredi Péter (Budapest, II. Rákóczi F. G.)

II. megoldás *a feladat első részéhez.* x és s kifejezhetők φ-vel: $x=2\cos\varphi$, $s=2\cos3\varphi$, így (1) helyett azt kell bizonyítanunk, hogy a csupán egy változót tartalmazó

(4) $$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi-2\cos3\varphi=0$$

egyenlőség minden φ-re fennáll – hacsak teljesül az I. megoldásban talált $0^\circ<\varphi<30^\circ$ korlátozás –, vagyis hogy (4) azonosság. Valóban, (4) a képletgyűjteményekből ismert, de enélkül is gyorsan kiadódó

$$\cos3\varphi=\cos2\varphi\cos\varphi-\sin2\varphi\sin\varphi=\cos\varphi(2\cos^2\varphi-1-2\sin^2\varphi)=$$
$$=\cos\varphi(4\cos^2\varphi-3)$$

azonosság más alakja.

Az összefüggést a $30^\circ\le\varphi<45^\circ$ szögekre is kiterjeszthetjük. Ekkor célszerű az OP-vel egyirányú OS-t tekinteni pozitívnak, s így

$$x^3-3x+s=0$$

áll fenn minden helyzetben.

Tiszai István (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)