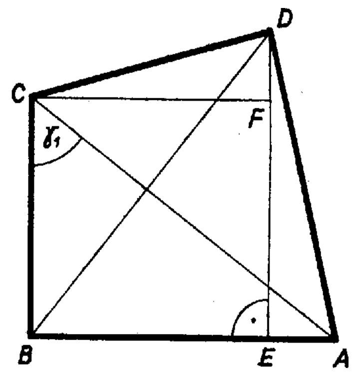
I. megoldás. Számoljunk hektométer (= 100 m) egységekben és válasszuk a betűzést úgy, hogy $AB = 5$, $ABC\sphericalangle = 90°$, $BC = 3{,}5$, $BCD\sphericalangle = 105°$ és $CD = 4$ legyen. Legyen D vetülete AB-n E, és C vetülete DE-n F. Ekkor a CDF derékszögű háromszögben $FCD\sphericalangle = 15°$, és így

$$BE = CF = 4\cos 15° = 4\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{8\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{2(3+2\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = \sqrt{6}+\sqrt{2}(\approx 3{,}86).$$



Hasonlóan, majd kivonással és összeadással

$$\begin{aligned}
FD &= 4\sin 15° = 4\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{2(3-2\sqrt{3}+1)} = \\
&= \sqrt{6}-\sqrt{2}(\approx 1{,}04). \\
AE &= AB - BE = 5-\sqrt{6}-\sqrt{2}, \\
DE &= 3{,}5+\sqrt{6}-\sqrt{2} \quad \text{és ezekből} \\
AD^2 &= 53{,}25 - 3\sqrt{6} - 17\sqrt{2} = 53{,}25 - \sqrt{54} - \sqrt{578} \approx \\
&\approx 53{,}25 - 7{,}348 - 24{,}042 = 21{,}860, \\
AD &\approx 4{,}676.
\end{aligned}$$

A terület, mint az ABD és BCD háromszögek területének összege:

$$t = \frac{1}{2}(AB\cdot DE + BC\cdot CF) = \frac{1}{2}(17{,}5+5\sqrt{6}-5\sqrt{2}+3{,}5\sqrt{6}+3{,}5\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(35+17\sqrt{6}-3\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(35+\sqrt{1734}-\sqrt{18}) \approx \frac{1}{4}(35+41{,}64-4{,}24) = 18{,}10 \text{ hektár.}$$

Baróthy Béla (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzés. 15° függvényeit a $45°-30°$ vagy $60°-45°$ alakból az addíció-tételek alapján is megkaphatjuk; ezeket a következő megoldásban is felhasználjuk:

$$\sin 105° = \cos 15° = \cos(45°-30°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\cos 105° = -\sin 15° = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

II. megoldás. Az ABC derékszögű háromszögből, $BCA\sphericalangle = \gamma_1$ jelöléssel

$$AC = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+7^2} = \frac{\sqrt{149}}{2}, \qquad \sin\gamma_1 = \frac{10}{\sqrt{149}}, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{7}{\sqrt{149}}.$$

Ezekből, az addíció tételeket, majd az ACD háromszög AD oldalára a koszinusz-tételt alkalmazva

$$\cos ACD\sphericalangle = \cos(105^\circ - \gamma_1) = \frac{1}{2\sqrt{298}}\left[10(\sqrt{3}+1) - 7(\sqrt{3}-1)\right] = $$
$$= \frac{17+3\sqrt{3}}{2\sqrt{298}},$$

$$\sin ACD\sphericalangle = \frac{1}{2\sqrt{298}}\left[7(\sqrt{3}+1) + 10(\sqrt{3}-1)\right] = \frac{17\sqrt{3}-3}{2\sqrt{298}};$$
$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2CD\cdot CA\cdot\cos ACD\sphericalangle =$$
$$= 37{,}25 + 16 - 4\sqrt{149}\cdot\frac{17+3\sqrt{3}}{2\sqrt{298}} = 53{,}25 - 17\sqrt{2} - 3\sqrt{6},$$

amint fent is kaptuk. Továbbá a négyszög ABC és ACD részháromszögeiből

$$t = \frac{1}{2}(AB\cdot BC + AC\cdot CD\sin ACD\sphericalangle) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(17{,}5 + \sqrt{149}\cdot 4\cdot\frac{17\sqrt{3}-3}{2\sqrt{298}}\right) = \frac{1}{2}(17{,}5 + 17\sqrt{6} - 3\sqrt{2}).$$

Halek Tibor (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)