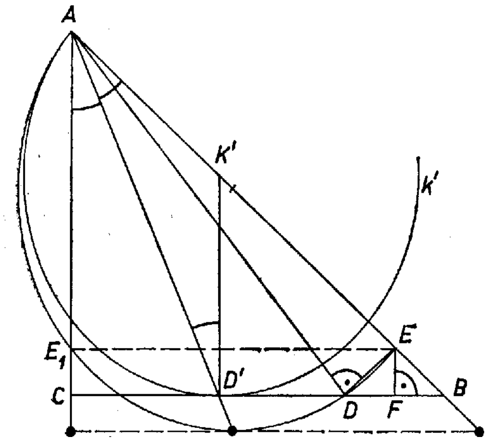
I. megoldás. Jelöljük E merőleges vetületét AC-n E_1-gyel, ekkor $E_1E = CF$ és $AE_1E \triangle \sim ACB \triangle$, így CF ugyanakkor a legkisebb, amikor AE.



1. ábra

Az AE mint átmérő fölé rajzolt félkör átmegy a CB oldal D pontján és megfordítva, ha egy félkör AE átmérője AB-n van és a félkör átmegy BC egy D pontján, akkor $DE \perp AD$, s így E és CB-n levő F vetülete a feladatban leírt módon keletkező pontok.

Így a feladatot visszavezettük a következőre: keressük a legkisebb átmérőjű félkört, amelyiknek AE átmérője az AB egyenesen van és amelyiknek van közös pontja BC-vel. Megmutatjuk, hogy ez a BC-t érintő félkör. Húzzuk meg ugyanis egy tetszés szerinti leírt tulajdonságú félkörnek a BC-vel párhuzamos érintőjét. Ez az AB és AC egyenesekkel egy ABC-hez hasonló és azt tartalmazó háromszöget zár be; így belőle kicsinyítéssel kapjuk az ABC háromszöget és benne a BC oldalt érintő félkört. Az utóbbi félkör átmérője tehát a legkisebb a vizsgált félkörök közt, amint állítottuk. Legyen ekkor k' középpontja K', az érintési pont D', így $BC \perp K'D' \parallel AC$, és $AD'K'$ egyenlő szárú háromszög, ezért

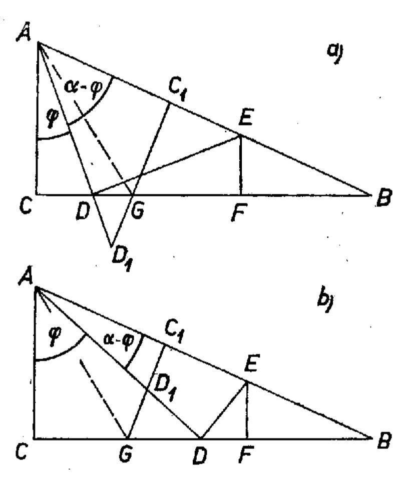
$$K'AD'\sphericalangle = K'D'A\sphericalangle = D'AC\sphericalangle,$$

tehát a legrövidebb CF-re és legrövidebb AE szakaszra vezető D pontot a CAB szög felezője metszi ki a CB befogóból.

II. megoldás. A szerkesztés folytán DEF és ADC hasonló háromszögek,

$$DF = AC \cdot \frac{DE}{AD},$$

vagyis DF hosszát az ADE derékszögű háromszög kicsinyítésével is megkapjuk, A-ból induló befogóját AC hosszúságúnak véve, ekkor a keresett hossz a másik befogó. Egyszerűen kapjuk ezt, AC-t az AB egyenesre fölmérve, és a C_1 végpontban állított merőlegessel metszve az AD egyenest D_1-ben; így $C_1D_1 = DF$, és $CF = CD + C_1D_1$. Ekkor a C_1D_1 egyenes a CB tükörképe a CAB szög felezőjére nézve, ezért a CB, C_1D_1 egyenespár G metszéspontja rajta van a szögfelezőn.



2. ábra

Ha D-t éppen G-ben vettük fel, akkor D_1 is itt adódik, és $CF = CD + DF = CG + C_1D_1 = CG + C_1G = 2 \cdot CG$. Megmutatjuk, hogy D minden más helyzetében $CF > 2CG$, vagyis D keresett helyzete éppen a G pont. A $CD < CG$ esetre szorítkozunk (2. a ábra), a $CG < CD < CB$ eset hasonló átgondolását az olvasóra hagyjuk (2. b ábra). $CD < CG$ miatt $CAD\sphericalangle < CAB\sphericalangle/2$, D_1 a CB-nek A-t nem tartalmazó partján adódik. A DD_1G háromszögben

$$D_1DG\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 90^\circ - CAD\sphericalangle > 90^\circ - C_1AD_1\sphericalangle = AD_1C_1\sphericalangle = DD_1G\sphericalangle,$$

ezért $D_1G > DG$, tehát $CF = CD + C_1G + GD_1 > CD + C_1G + DG = CG + C_1G = 2CG$, amit bizonyítani akartunk.

Csóka Géza (Ajka, Bródy I. g. III. o. t.)
Bottyán István (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

III. megoldás. DEF és ADC, valamint EFB és ACB hasonló derékszögű háromszögek (1. ábra), ezért $AC = b$, $CB = a$, $CD = x$, $CF = y$ és $AB = c$ jelöléssel egyrészt

$$DF = EF \cdot \frac{b}{x}, \quad y = x + \frac{b}{x} \cdot EF, \text{ másrészt}$$

$$\frac{EF}{b} = \frac{FB}{a} = \frac{a-y}{a}, \quad EF = b - \frac{b}{a} \cdot y, \quad \text{tehát} \quad y = x + \frac{b^2}{x} - \frac{b^2}{ax} \cdot y,$$

$$y = a \cdot \frac{x^2 + b^2}{ax + b^2}. \tag{1}$$

A törtet eltávolítva, az egyenletet 0-ra redukálva és a bal oldalt teljes négyzetté kiegészítve:

$$0 = ax^2 - axy + b^2(a-y) = a\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + b^2(a-y) - a\frac{y^2}{4};$$

$$a\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{a}{4} \cdot y^2 + b^2y - ab^2 = a\left[\left(\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a}\right)^2 - b^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a}\right)^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right].$$

Itt a betűk pozitív távolságokat jelentenek, tehát a bal oldal nem negatív, s így a jobb oldal sem lehet az. y értéke ugyanakkor a legkisebb, amikor a szögletes zárójelbeli első tagé, tehát amikor

$$\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a} = \frac{bc}{a}, \qquad y = \frac{2b(c-b)}{a}.$$

Ekkor

$$x = \frac{y}{2} = \frac{b(c-b)}{a} = a \cdot \frac{b(c-b)}{a^2} = a \cdot \frac{b(c-b)}{c^2 - b^2} = a \cdot \frac{b}{c+b},$$

amiben felismerjük a szögfelező lemetszette szakaszt.

Külvári István (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentieket megkaphatjuk trigonometriai úton is. Legyen $AC = 1$, $CAD\sphericalangle = \varphi$, $CAB\sphericalangle = \alpha$, így $DAB\sphericalangle = \alpha - \varphi$, továbbá $CD = \operatorname{tg}\varphi$, $AD = 1/\cos\varphi$, $DE = AD \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, $DF = DE\cos\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, és az addíció tétellel, a nevezőben adódó szorzatot összeggé alakítva $\cos u \cos v = \left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]/2$ alapján, végül a nevezőt növelve

$$CF = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{\sin(\varphi + \alpha - \varphi)}{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{2\sin\alpha}{\cos(\varphi+\alpha-\varphi) + \cos(2\varphi-\alpha)} \geq$$

$$\geq \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + 1} = 2\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

továbbá egyenlőség csak $\cos(2\varphi - \alpha) = 1$, $2\varphi - \alpha = 0$, $\varphi = \alpha/2$ esetén áll fönn.

Hasonlóan, valamivel egyszerűbben

$$AE = \frac{AD}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)} \geq \frac{2}{\cos\alpha + 1} = \frac{1}{\cos^2\alpha/2}.$$

Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)