I. megoldás. Legyen a bal oldal első tagja röviden a, a második tag b. Így nyilvánvalóan $a > b > 0$, ezért a számtani és a mértani középre ismert egyenlőtlenség szerint

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Ennek alapján a bal oldal köbére

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < a^3 + b^3 + \frac{3}{4}(a+b)^3,$$

$$(a+b)^3 < 4(a^3+b^3) = 4 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3, \tag{2}$$

végül mivel kisebb szám köbgyöke kisebb:

$$a + b < \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}, \quad \text{qu.e.d.}$$

Varga Gabriella (Szombathely, Savaria Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A felhasznált (2) egyenlőtlenségre még egyet közlünk a több lehetséges bizonyítás közül. Alkalmazzuk a három nem negatív szám számtani és a mértani közepére ismert egyenlőtlenséget az a^3, a^3, b^3, majd az a^3, b^3, b^3 számokra ($a^3 \geqq b^3 \geqq 0$):

$$\sqrt[3]{a^6b^3} = a^2b \leqq \frac{2a^3+b^3}{3}, \qquad ab^2 \leqq \frac{a^3+2b^3}{3}.$$

Képezzük ezek összegének 3-szorosát, és adjuk hozzá mindkét oldalhoz $a^3 + b^3$-t:

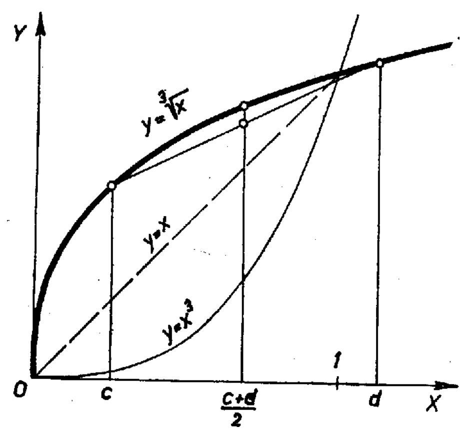
$$a^3 + 3\left(a^2b + ab^2\right) + b^3 = (a+b)^3 < 4\left(a^3+b^3\right), \quad \text{qu.e.d.}$$

Eredményünk így is írható:

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}{2} \leqq \sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}, \tag{3}$$

az első alak jobb oldala a és b ún. 3-adik hatványközepe.

Nádai László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. II. o. t.)



2. A (3) második alakjának szemléletes megfelelője $0 \leqq c < d$ esetére az, hogy az $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ függvény grafikonjának (ami $y = x^3$ $(x \geqq 0)$ grafikonjának tükörképe az $y = x$ egyenesre) c és d abszcisszájú pontját összekötő húr a görbeív alatt halad, a görbe íve konkáv. Ugyanis a bal oldalon annak a trapéznak a középvonala áll, melynek párhuzamos oldalai az $x = c$ és $x = d$ pontokhoz tartozó ordinátaszakaszok – vagyis a húr felezőpontjának ordinátája –, a jobb oldalon pedig a függvény értéke a középvonal talppontjához tartozó x helyen.

II. megoldás. Bebizonyítjuk a következő két egyenlőséget:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}, \qquad \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}},$$

ezekből (1) összeadással adódik.

Képezzük mindkét esetben a jobb és a bal oldal köbének különbségét (a számítást együtt végezhetjük, kettős előjellel):

$$3 \pm \frac{3\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{3\sqrt[3]{3}}{9\sqrt[3]{9}} \pm \frac{1}{81} - 3 \mp \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \pm \frac{1}{81} > \frac{1}{9} \pm \frac{1}{81} > 0,$$

tehát a jobb oldal köbe nagyobb a bal oldal köbénél. Ezért állításunk is helyes.

Losonci Zoltán (Szeged, Vedres I. Épip. t., III. o. t.)