I. A kérdést visszavezethetjük két egyszerűbb egyenlet közös gyöke létezésének kérdésére. Ha ugyanis egy szám (1)-nek is, (2)-nek is gyöke, akkor 0-vá teszi a

$$12x^3+28x^2+6x+14=0 \tag{3}$$

egyenlet bal oldalát is, amely azokból kivonással adódik, valamint az összeadással adódó

$$6x^4+14x^3+12x^2+28x=x(6x^3+14x^2+12x+28)=0 \tag{4}$$

egyenlet bal oldalát is. Továbbá mivel az utóbbinak $x=0$ gyöke nyilvánvalóan nem elégíti ki sem (1)-et, sem (2)-t, azért a közös gyök – amennyiben létezik – gyöke a (4)-ből a 0 gyök leválasztásával adódó

$$6x^3+14x^2+12x+28=0 \tag{5}$$

egyenletnek is, ennélfogva közös gyöke (3)-nak és (5)-nek.

Ugyanígy azt a

$$-18x-42=0$$

egyenletet is ki kell elégítenie (1) és (2) közös gyökének, amelyet (5) kétszeresének (3)-ból való kivonásával képeztünk. Ennek egyetlen gyöke $x=-7/3$. Ez (1)-et is, (2)-t is kielégíti, tehát közös gyökük, és más közös gyökük nincs.

II. Ezek szerint $x+7/3$ mindkét eredeti egyenletnek gyöktényezője. További gyökeik meghatározása végett osszuk (1) és (2) bal oldalát a közös gyöktényező 3-szorosával, $3x+7$-tel. Az ismert

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \quad \text{és} \quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

azonosság felhasználásával a hányados így alakítható:

$$\text{(1) esetén:} \qquad (x^3+1)+2x(x+1)=(x+1)(x^2+x+1),$$

$$\text{(2) esetén:} \qquad (x^3-1)-2x(x-1)=(x-1)(x^2-x+1).$$

Innen látjuk, hogy (1)-nek további gyöke -1, (2)-nek további gyöke $+1$, és több valós gyökük nincs, mert a másodfokú tényezőket 0-val egyenlővé téve az egyenletek (közös) diszkriminánsa -3, negatív.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Kereshetjük a közös gyököt (3), ill. (5) bal oldalának tényezőkre bontása útján is:

$$6x(2x^2+1)+14(2x^2+1)=2(3x+7)(2x^2+1), \text{ ill.}$$
$$6x(x^2+2)+14(x^2+2)=2(3x+7)(x^2+2).$$

A másodfokú tényezők nem adnak valós gyököt, de még ha a belőlük adódó komplex gyököt tekintjük is, az sem közös gyök.

Hernádi Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)
Kloknicer Imre (Budapest, Bláthy O. Erősáramú Ip. Techn. III. o. t.)

2. Egyszerűbb a fenti eljárás, ha (l)-ből és (2)-ből először leválasztjuk a könnyen felismerhető nem közös gyöküket, -1-et, ill. $+1$-et.