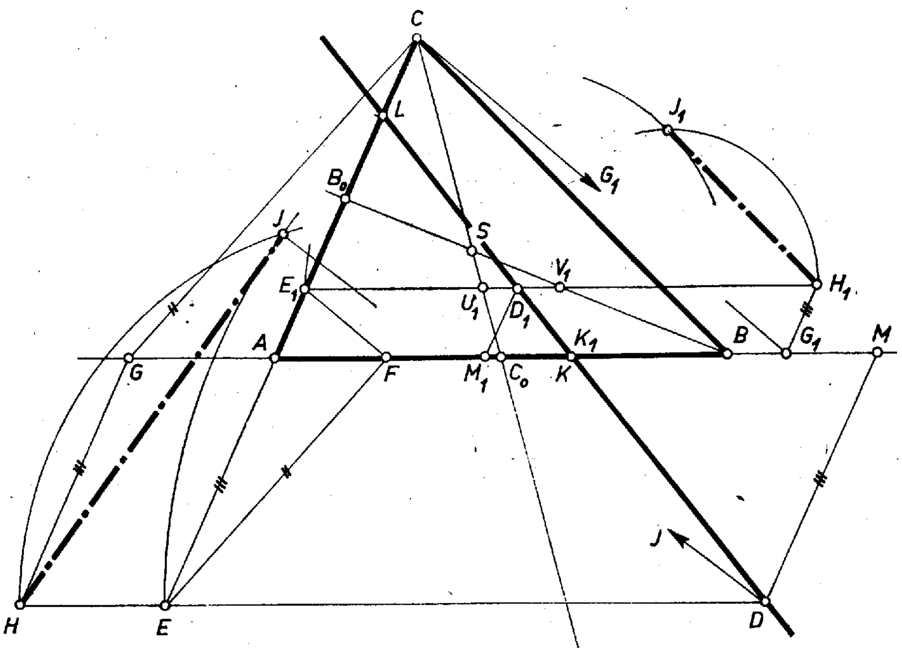
I. Legyen először D az ABC háromszögön kívül. Ekkor E a CA meghosszabbításán, G a BA meghosszabbításán, és H a DE meghosszabbításán adódik (D és E különböző pontok). Így J létrejön, tehát K is, éspedig A-tól B irányában, mert $GK = HJ > HD - JD = HD - ED = HE = GA$. Továbbá a DK egyenes azon az oldalán metszi az EA egyenest egy L pontban, amelyiken C van, mert

$$AK = GK - GA < HD - HE = ED,$$

hiszen Thalész tétele szerint DHJ derékszögű háromszög, és DH az átfogója.



Meg fogjuk mutatni, hogy az AKL háromszög területe fele akkora, mint az ABC háromszögé. Ebből már következik, hogy L az AC szakasz belsejében van. Az ellenkező esetben ugyanis az AKL háromszög magában foglalná az ABC háromszög felét kitevő AC_0C háromszöget. Továbbá hogy K nem lehet AB meghosszabbításán, mert akkor DK a B_0B meghosszabbítását metszené, s így B_0 benne lenne az EDK szögtartományban, tehát az AL szakaszon, ekkor pedig az ABC háromszög felét kitevő ABB_0 háromszög volna az AKL háromszög része. Így az AKL háromszög része az ABC háromszögnek, a szerkesztő eljárás külső D pont esetére helyes.

A végzett szerkesztés szerint AEF és ACG hasonló háromszögek, ezért

$$AG = AF \cdot \frac{AC}{AE} = \frac{AB \cdot AC}{4 \cdot AE} \qquad (= EH), \tag{1}$$

hiszen F negyedeli az AB oldalt. A DHJ háromszögből

$$\begin{aligned} GK^2 = HJ^2 = DH^2 - DJ^2 = DH^2 - DE^2 = (DH + DE)(DH - DE) = \\ = (EH + 2DE) \cdot EH = AG^2 + 2DE \cdot AG. \end{aligned} \tag{2}$$

Messe még az AC-vel D-n át húzott párhuzamos az AB egyenest M-ben; ekkor az AKL, MKD hasonló háromszögpárból

$$AL = MD \cdot \frac{AK}{MK} = AE \cdot \frac{AK}{MK}, \tag{3}$$

ezért (2), majd (1) felhasználásával

$$\begin{aligned} AK \cdot AL = AE \cdot \frac{AK^2}{MK} = AE \cdot \frac{(GK - AG)^2}{MG - KG} = \\ = AE \cdot \frac{AG^2 + 2 \cdot DE \cdot AG - 2KG \cdot AG + AG^2}{DE + AG - KG} = AE \cdot 2AG = \frac{AB \cdot AC}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

(Felhasználtuk, hogy K a GM szakaszon van, hiszen $GK = HJ < HD = GM$.)

Végül (4)-et $\sin BAC$-vel szorozva jobbról az ABC háromszög területe áll, balról pedig az AKL háromszög területének kétszerese. Ezt akartuk bizonyítani.

II. A D pontot a C_0B szakaszon felvéve az eljárás nem használható, E az A-ban adódik, de G nem jön létre. (Ekkor azonban D játssza K szerepét és (4)-et $AD : AC_0 = AC : AL$ alakban írva a vizsgáltnál egyszerűbb szerkesztés adódik: L-et AC-ből kimetszi a DC-vel C_0-on át fektetett párhuzamos.)

III. D-t az SC_0B háromszögben választva – beleértve az SC_0, SB szakaszokat is, de C_0, ill. B nélkül – a fenti számítás egyes részei módosulnak. (Az ábra a DK egyenes ilyen D_1 pontjából kiindulva is bemutatja a szerkesztést, a megfelelő pontok jele mellett mindenütt 1-es index áll.) Ekkor G_1 az AB félegyenesen adódik, egyébként (1) érvényes.

H_1 mindig E_1D_1 meghosszabbításán adódik. Legyen ugyanis $CE_1 = k_1 \cdot CA$ – ahol $2/3 \le k_1 < 1$ – és messe a D_1E_1 egyenes B_0B-t V_1-ben, CC_0-t U_1-ben, vagyis D_1 az U_1V_1 szakaszon van, megengedve a végpontokat is. Ekkor

$$B_0E = (2k_1 - 1) \cdot B_0A, \qquad E_1D_1 \le E_1V_1 = (2k_1 - 1) \cdot AB,$$
$$AE_1 = (1 - k_1) \cdot CA, \qquad AG_1 = E_1H_1 = \frac{AB}{4(1-k_1)},$$
$$E_1H_1 - E_1D_1 \ge E_1H_1 - E_1V_1 = AB\left(\frac{1}{4(1-k_1)} - (2k_1 - 1)\right) = AB \cdot \frac{1 + (4k_1 - 3)^2}{8(1-k_1)} > 0,$$

vagyis H_1 az E_1V_1 meghosszabbításán van.

J_1, K_1 létrejön, mert $D_1H_1 > E_1D_1$. Ugyanis D_1-t az U_1V_1 szakaszon mozgatva E_1, G_1, H_1 állandók, és D_1H_1 legkisebb és E_1D_1 legnagyobb lehetséges értékének különbsége nem negatív:

$$D_1H_1 - E_1D_1 \ge V_1H_1 - E_1V_1 = E_1H_1 - 2E_1V_1 = AB\left(\frac{1}{4(1-k_1)} - 2(2k_1 - 1)\right) =$$
$$= \frac{AB(4k_1 - 3)^2}{4(1-k_1)} \ge 0. \tag{5}$$

(2) így módosul:

$$K_1G_1^2 = H_1J_1^2 = D_1H_1^2 - E_1D_1^2 = (D_1H_1 + E_1D_1)(D_1H_1 - E_1D_1) =$$
$$= E_1H_1(E_1H_1 - 2E_1D_1) = AG_1^2 - 2E_1D_1 \cdot AG_1. \tag{6}$$

(3) változatlanul érvényes. (6) és (1) alapján

$$AK_1 \cdot AL_1 = AE_1 \cdot \frac{AK_1^2}{M_1K_1} = AE_1 \cdot \frac{(AG_1 - K_1G_1)^2}{M_1G_1 - K_1G_1} =$$
$$= AE_1 \cdot \frac{AG_1^2 - 2K_1G_1 \cdot AG_1 + AG_1^2 - 2E_1D_1 \cdot AG_1}{AG_1 - E_1D_1 - K_1G_1} = 2AE_1 \cdot AG_1 = \frac{AB \cdot AC}{2},$$

vagyis a (4) szolgáltatta eredmény változatlanul érvényes. (Felhasználtuk, hogy G_1K_1 egy irányú G_1A-val, vagyis H_1D_1-gyel, G_1M_1-gyel, és hogy $G_1M_1 = H_1D_1 > H_1J_1 = G_1K_1$.) Ezek szerint a szerkesztés a C_0SB szögtartomány minden pontjára érvényes, kivéve a C_0B szakaszt.

(5) szerint speciálisan a $k_1 = 3/4$ és $D_1 = V_1$ esetben $D_1H_1 = E_1D_1$, innen $G_1K_1 = H_1J_1 = 0$, $G_1 = K_1$. Ámde ugyanakkor $AG_1 = AB$, vagyis K_1 a B-ben adódik, a felező egyenes B_0B, ami közvetlenül is világos. – Ugyanez várható az SB szakaszon levő $D_1 = V_1$ pontokra is. Ekkor (6)-ból, (5)-öt felhasználva

$$K_1G_1^2 = E_1H_1(E_1H_1 - 2E_1V_1) = \frac{(4k_1 - 3)^2 AB^2}{16(1-k_1)^2}, \qquad \text{amiből}$$
$$K_1G_1 = \frac{|4k_1 - 3| \cdot AB}{4(1-k_1)} = \frac{(4k_1 - 3) \cdot AB}{4(1-k_1)}, \quad \text{ha} \quad \frac{3}{4} \le k_1 < 1,$$
$$= \frac{(3 - 4k_1) \cdot AB}{4(1-k_1)}, \quad \text{ha} \quad \frac{2}{3} \le k_1 < \frac{3}{4}.$$

Az első esetben valóban fennáll

$$AK_1 = AG_1 - K_1G_1 = AB\left(\frac{1}{4(1-k_1)} - \frac{4k_1 - 3}{4(1-k_1)}\right) = AB.$$

A második esetben viszont csak akkor esik K_1 a B csúcsba, ha G_1-től nem A, hanem B felé mérjük fel a H_1J_1 szakaszt, hiszen $2/3 \le k_1 < 3/4$ esetén már G_1 is az AB szakasz pontja, mert $4(1 - k_1) > 1$, $AG_1 < AB$. Eszerint az ilyen $D_1 = V_1$ ponton át az eljárásunkkal kapott területfelező egyenesen felül más ilyen egyenes is létezik. Ez persze nem hibája eljárásunknak. A vizsgált módon megkapunk egyet a területfelező egyenesek közül.

Szerkesztésünk S-ből kiindulva a CC_0 súlyvonalat eredményezi, ugyanis $k_1 = 2/3$ esetén $AG_1 = AB \cdot 3/4$ és $K_1G_1 = AB/4$, $K_1 = C_0$, de a BB_0, valamint az AS súlyvonal is felezi a háromszög területét.

Hasonlóan kimutatható, hogy az SC_0 szakaszon levő $D_1 = U_1$ pontokra mindig $K_1 = C_0$ adódik.

IV. A sík minden pontja beletartozik egyikébe annak a 6 szögtartománynak, melyek közös csúcsa S, és amelyeket a 3 súlyvonal félegyenesei határolnak. A további ilyen D pontok esetében úgy válik eljárásunk alkalmassá és a fentiek szerint érvényessé, hogy minden előforduló A, B, C betű helyére egy más sorrendjüket írjuk; ha pl. a B_0SA szögtartományban van D, akkor A, B, C helyére rendre C, A, B írandó. – D bizonyos helyzeteiben az eredeti betűzés szerinti szerkesztés is megadja a területfelező egyenesnek az AB egyenesen levő pontját, ha a HJ szakasz felmérési irányát alkalmasan módosítjuk, ennek vizsgálatát azonban itt nem tekintjük feladatunknak.

V. Csekély végrehajtási egyszerűsítés adódik abból az észrevételből, hogy a D, E, H ponthármas eltolással átvihető M, A, G-be. Ha H helyett M-et szerkesztjük, az MG átmérő fölé írjuk a Thalész-kört, ebből az M körüli, MA sugarú körívvel metsszük ki J^*-ot, végül ezt G körül ráfordítjuk AB-re, a K pontba, ez csak annyival kevesebb az előírt szerkesztésnél, hogy a 7. lépésben nem kell átemelni a körző csúcsát H-ból G-be.