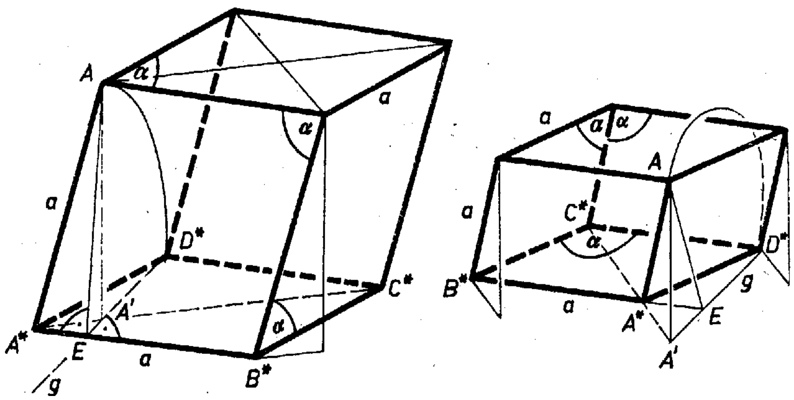
Megoldás. I. Legyen A^* egy olyan csúcs, amelyből induló élek páronként egyenlő szöget zárnak be. Állítsuk a P paralelepipedont egy ezt tartalmazó $A^*B^*C^*D^*$ lapjával egy H vízszintes asztallapra, legyen a fedőlapnak A^*-gal szomszédos csúcsa A, és legyen $AA^*B^*\sphericalangle = AA^*D^*\sphericalangle = B^*A^*D^*\sphericalangle = \alpha$. Az $\alpha = 90^\circ$ esetet kizárjuk, mert a jól ismert kockára vezet.

P magasságát megadja A-nak a H-n levő A' vetületétől való távolsága. Megmutatjuk, hogy A' rajta van az A^*C^* átló egyenesén. Az A^*B^*A lapot az A^*B^* él körül forgatva a fenti szögegyenlőségek, valamint $AA^* = D^*A^*$ miatt A áthalad D^*-on. Forgatásának S síkja merőleges H-ra, mert H tartalmazza a tengelyt. Ezért A bármely helyzetében H-n levő vetülete rajta van a D^*-on átmenő A^*B^*-ra merőleges g egyenesen, vagyis A' is a g-n van. Ugyanígy adódik $AA^* = B^*A^*$-ból, hogy A' rajta van a B^*-on átmenő, A^*D^*-ra merőleges egyenesen is. Ezek szerint A' az $A^*B^*D^*$ háromszög magasságpontja. Ennélfogva átmegy A'-n e háromszög A^*-ból kiinduló magasságvonala is, ami pedig $A^*B^* = A^*D^*$ miatt azonos az alaprombusz A^*C^* átló egyenesével. Ezt akartuk bizonyítani.



Messe S az A^*B^* tengelyt E-ben, így a keresett magasság:

$$m = AA' = \sqrt{AE^2 - A'E^2}.$$

Az AA^*E, és D^*A^*E derékszögű háromszögek A^*-nál levő szöge α, ill. $\alpha > 90^\circ$ esetén $180^\circ - \alpha$, ezért $AE = a\sin\alpha$, $A^*E = |a\cos\alpha|$, ahol a a rombuszlapok oldalának hossza. Az $A'A^*E$ derékszögű háromszög A^*-nál levő szöge $\alpha/2$, mert vagy azonos a $B^*A^*C^*$ szöggel, vagy annak csúcsszöge, tehát $A'E = A^*E \cdot \operatorname{tg}\alpha/2$,

$$m = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha/2}.$$

Az alaplap területe $a^2\sin\alpha$, így a térfogat

$$V = V(a,\ \alpha) = a^3\sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha/2}. \tag{1}$$

A gyökjel alatti K kifejezés goniometriai összefüggések alapján többféleképpen alakítható. Legyen rövidítésül $\cos\alpha/2 = c$, $\operatorname{tg}\alpha/2 = t$. Az $1 + \operatorname{tg}^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)/\cos^2 x = 1/\cos^2 x$ és $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosságok felhasználásával

$$\begin{aligned} K = 1 - \left(1 + t^2\right)\cos^2\alpha = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{c^2} = \\ = \frac{1}{c^2}\left(-4c^4 + 5c^2 - 1\right) = \frac{-4}{c^2}\left(c^2 - 1\right)\left(c^2 - 1/4\right) = \\ = \left(1 - c^2\right)(2c + 1)(2c - 1)/c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Másképpen, $\sin\alpha = 2t/\left(1 + t^2\right)$, $\cos\alpha = \left(1 - t^2\right)/\left(1 + t^2\right)$ alapján

$$K = \frac{4t^2}{\left(1 + t^2\right)^2} - \frac{(1 - t^2)t^2}{(1 + t^2)t^2} = \frac{t^2\left(3 - t^2\right)}{1 + t^2}, \text{ továbbá} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} K = 1 - \cos^2\alpha\left(1 + \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = \frac{-2(\cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1/2)}{1 + \cos\alpha} = \\ = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot (1 + 2\cos\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

A legutóbbi szerint

$$V = a^3\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha} = 2a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 2\cos\alpha}. \tag{5}$$

A $K>0$ nyilvánvaló követelmény miatt P összeállítása csak olyan rombuszlapokból lehetséges, amelyeknek A^*-beli szögére (2)–(4) miatt fennáll $2c-1>0$, $3-t^2>0$, azaz $\cos\alpha/2>1/2$, $\sqrt{3}>\operatorname{tg}\alpha/2$ (>0), ill. $1+2\cos\alpha>0$, $\cos\alpha>-1/2$, vagyis mindháromból $\alpha<120^\circ$. Ez közvetlenül is belátható, hiszen három 120° szögű rombuszt összeillesztve azok egy síkban lesznek, $\alpha>120^\circ$ esetén pedig kettőt összeillesztve, és egyiket a közös él körül forgatva, az α szögek szabad szárai közti szög sohasem nagyobb $360^\circ-2\alpha$-nál, a harmadik lap nem illeszthető hozzá mindkét laphoz.

Könnyen látható, hogy más feltétele az összeállításnak nincs. Eszerint $\alpha<120^\circ$ esetén a 6 egybevágó rombuszlap akár hegyes, akár tompa szögével alkothat A^* típusú csúcsot, ha viszont a rombusz tompaszöge $\geqq 120^\circ$, akkor csak a hegyes szöggel képezhető ilyen csúcs.

II. Kifejezhetjük V-t a rombusz $A^*C^*=e$, $B^*D^*=f$ átlóival is. Ezekkel

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{e^2+f^2},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{f}{e},$$
$$\sin\alpha=\frac{m_1}{a}=\frac{am_1}{a^2}=\frac{ef}{2a^2}=\frac{2ef}{e^2+f^2}$$

(m_1 a rombuszlap magassága), így (3) és (1) alapján

$$V=V(e,f)=\frac{f}{8e}\left(e^2+f^2\right)\sqrt{3e^2-f^2}.$$

(A kifejezésnek az I. résztől független levezetését az olvasóra hagyjuk.)

Tihanyi László (Makó, József A. g. III. o. t.)
Rosta László (Csongrád, Batsányi J. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Néhány dolgozat szerint a feladat szövegének 2. mondata fölösleges. Valóban, ha P egy tetszés szerinti csúcsában van két különböző szög, akkor a három szög közül kettő egyenlő. Az egyenlő szögek közös szára mint él mentén átmenve P szomszédos csúcsába, itt 3 egyenlő szöget találunk. – A 2. mondattal fölösleges esetszétválasztások elkerülését célozta a szerkesztőség.