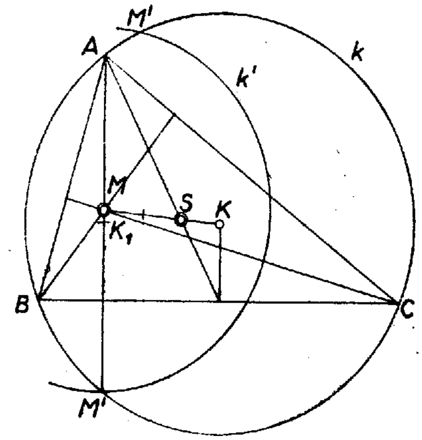
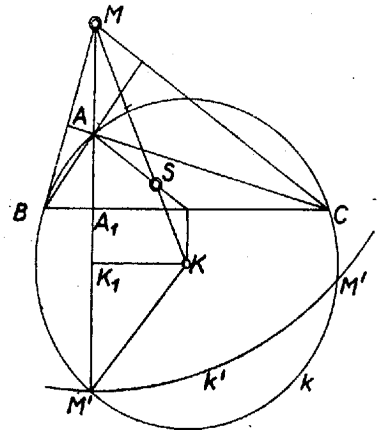
Ismeretes, hogy a háromszög M magasságpontja, S súlypontja és k körülírt körének K középpontja ebben a sorrendben a háromszög *Euler*-féle egyenesén van, és $MS = 2\,SK$. Ennek alapján M-et és S-et az előírt távolságban felvéve, kijelölhetjük K helyzetét, és az adott r sugár alapján megrajzolhatjuk k-t.

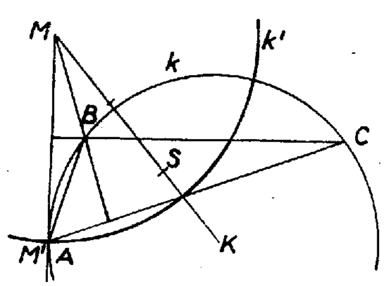


1. ábra



2. ábra

Tudjuk másrészt, hogy M-nek bármelyik oldal egyenesére való tükörképe rajta van k-n, és azonos az oldalra merőleges m magasságegyenes és k második, a szemben fekvő csúcstól különböző közös pontjával, ha pedig m érinti k-t, akkor azonos a csúccsal. Tekintsük M tükörképét arra az oldalegyenesre, amelyiknek M-től való d távolsága adott, legyen a kép M'. Így $MM' = 2d$, tehát M'-t kimetszi k-ból az M körül $2d$ sugárral írt k' kör. Most már a kérdéses oldal egyenesét megadja MM' felező merőlegese, az oldal végpontjait ennek k-n levő metszéspontjai, a harmadik csúcsot pedig az MM' magasságegyenesnek k-val való második metszéspontja (az 1–2. ábrán B és C, ill. A), amennyiben pedig MM' érinti k-t, akkor A azonos M'-vel (3. ábra).



3. ábra

Csak azt kell bizonyítanunk, hogy az ABC háromszög magasságpontja M. Nem lehet, hogy a magasságpont az AM' magasságegyenesnek egy az M-től különböző pontja legyen, mert annak BC-re való tükörképe nem M' lenne.

K és k egyértelműen megszerkeszthetők. M' létrejön, ha k'-nek van közös pontja k-val, azaz ha

$$|2d - r| \leqq e \leqq 2d + r, \tag{1}$$

ahol $e = MK = 3MS/2$. – MM' felező merőlegese létrejön, ha M' az M-től különböző pont, azaz $d > 0$. Ezt most feltesszük, a $d = 0$ esetre később visszatérünk. – B, C létrejön, ha a felező merőlegesnek K-tól való távolsága kisebb r-nél. Ez mindenesetre teljesül, ha K-nak MM'-n levő K_1 vetületére nézve $MK_1 \leqq M'K_1$. Különben (2. ábra) MM'-nek A_1 felezőpontja elválasztja K_1-et M-től, és a kérdéses távolság A_1K_1. A KK_1M és KK_1M' derékszögű háromszögekből (tekintet nélkül K_1-nek az A_1M' félegyenesen elfoglalt helyzetére)

$$MK_1^2 = e^2 - KK_1^2 = e^2 - r^2 + M'K_1^2,$$
$$(d + A_1K_1)^2 = e^2 - r^2 + (d - A_1K_1)^2,$$

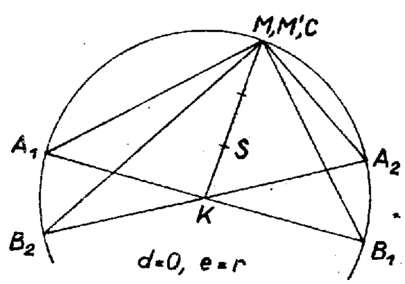
és így a feltétel:

$$(2) \qquad A_1K_1 = \frac{e^2 - r^2}{4d} < r, \quad \text{amiből} \quad e < \sqrt{4dr + r^2} = \sqrt{r(r + 4d)}.$$

Itt e (el sem érhető) fölső korlátja kisebb (1) jobb oldalánál, ezért a két feltétel így egyesíthető:

$$(3) \qquad |2d - r| \leqq e < \sqrt{r(r + 4d)}.$$

Végül A mindenesetre létrejön, mert M' a k-n van. – A két M' metszéspontból adódó két háromszög egymás tükörképe az MS egyenesre. k és k' érintkezése esetén egyenlő szárú háromszöget kapunk.



4. ábra

A $d = 0$ esetben a fenti felező merőleges határozatlan. Ez az eset azt jelenti, hogy M rajta van a háromszög szóban forgó oldalán. Ismeretes azonban, hogy M csak derékszögű háromszögben esik a háromszög kerületére; mégpedig a derékszög csúcsába, ekkor tehát rajta van k-n is, $MK = e = r$. Ha ez teljesül, akkor minden ABM háromszög megfelel, ahol A, B a k egy átmérőjének végpontjai, és M-től különbözők. (Más szóval : MM' felezőpontja maga M, minden ezen átmenő és MK-tól különböző egyenes vehető MB azaz CB felező merőlegeseként, és $CA \perp CB$, 4. ábra.) Ha viszont $d = 0$ és $e \neq r$, akkor nincs megoldás.

Külön említendő az $e = 0$ eset is, vagyis ha M és S egybeesnek, és így K is. Ekkor a (3) feltétel szerint csak $2d = r$ esetén van megoldás. Ekkor k' azonos k-val, M' a k tetszés szerinti pontja lehet, mindig szabályos háromszöget kapunk.

Domokos László (Tatabánya, Árpád Gimn., IV. o. t.),
Herényi István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.),
Szeredi Péter (Budapest, Rákóczi F. Gimn., III. o. t.)
dolgozatai alapján, kiegészítésekkel