I. megoldás. Legyen a két szám x és y, így

$$(x+y)^2 = x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 - xy + y^2),$$

és mivel $x+y>0$,

$$x + y = x^2 - xy + y^2. \tag{1}$$

Tekintsük y-t paraméternek és oldjuk meg az egyenletet x-re. Rendezzük az egyenletet x szerint és egészítsük ki teljes négyzetté a bal oldalt, előbb 4-gyel beszorozva:

$$x^2 - (y+1)\,x + (y^2 - y) = 0,$$
$$(2x - y - 1)^2 = -3y^2 + 6y + 1 = 4 - 3\,(y-1)^2.$$

Eszerint a jobb oldal nem nagyobb 4-nél, és csak $y-1=0$ és $y-1=\pm1$ esetén nem adódik rá negatív érték. Az első esetben $y=1$, és x pozitív értéke $x=2$. A második esetben csak az $y=2$ érték pozitív, ebből $x=1$, ismét az előbbi számpárt kaptuk.

Ezek szerint a követelményeknek csak az 1, 2 számpár felel meg.

Sásdy Béla (Szentendre, Ferences g. III. o. t.)

II. megoldás. Osszuk (1)-et a (pozitív) xy szorzattal. Átrendezés után

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}, \qquad \frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x} = 1,$$

és a bal oldalon egyik tört sem negatív. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $x>y$ legyen, így az első tag

$$\frac{x-1}{y} \ge \frac{y}{y} = 1, \qquad \text{tehat} \quad \frac{y-1}{x} \le 0.$$

Ez csak $y=1$ esetén teljesül, így pedig $x=2$.

Medveczky Mihály (Szombathely, Latinka S. gépip. t. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentitől nem lényegesen különböző megoldást kapunk (1)-ből xy-t levonva: $x+y-xy=(x-y)^2\ge1$, vagyis $xy-x-y+1=(x-1)(y-1)\le0$, de negatív sem lehet a szorzat, mert x, y pozitív egész szám, tehát x, y egyike 1, és akkora másikra 2 adódik.

Farkas Péter (Budapest, I. István g. I. o. t.)