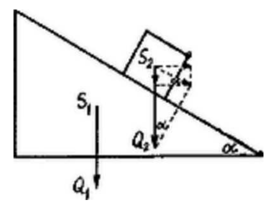
1 kg súlyú, 30°-os hajlásszögű lejtőre 1 kg-os kockát helyezünk. Hogy a kocka le ne csússzék, cérnával a lejtő felső végéhez ütött szöghöz erősítjük. Ezután a cérnát elégetjük, hogy a kocka lecsúszhassék. Csúszás közben mennyi lesz a lejtőből és kockából álló rendszer súlya? Ha a kocka helyett 1 kg-os hengert helyezünk a lejtőre, az a cérna elégetése után legurul a lejtőn. Mennyivel könnyebb a rendszer ekkor?

Megoldás. 1^0. A lejtő súlya legyen Q_1, hajlásszöge α, a reáhelyezett kockáé Q_2. Ha utóbbi nyugalomban van a lejtőn, a két testből álló rendszer súlya $Q_1 + Q_2$. (Párhuzamos erők eredője az erők összegével egyenlő.)



Ha a kocka csúszni kezd (súrlódás nélkül), akkor ezen mozgást a Q_2-nek a lejtő irányába eső összetevője, $Q_2 \sin\alpha$ létesíti és állandóan fenntartja. Ebből pedig az következik, hogy a $Q_2 \sin\alpha$ mozgató erőnek a nehézségi erő irányába eső összetevője, $Q_2 \sin\alpha \cdot \sin\alpha = Q_2 \sin^2\alpha$ *lefelé mozgat* és így nem gyakorol nyomást.[1] A rendszer súlya eszerint

$$Q = Q_1 + Q_2 - Q_2 \sin^2\alpha = Q_1 + Q_2 \cos^2\alpha.$$

$$\text{Ha} \quad Q_2 = Q_1, \qquad \text{akkor} \quad Q = Q_1(1+\cos^2\alpha)**$$

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{esetében} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad Q = Q_1\left(1+\frac{3}{4}\right) = 1\cdot 75 Q_1$$

$$Q_1 = 1 \text{ kg}, \quad \text{tehát} \quad Q = 1\cdot 75 \text{ kg}.$$

2^0. Ha kocka helyett Q_2 súlyú hengert helyezünk a lejtőre, akkor $Q_2 \sin\alpha$ erő hatása alatt haladó és forgó mozgás jön létre. A forgás tengelye a henger geometriai tengelye. Homogén tömegű henger esetén a forgó henger tengelye szabad tengely, azaz a forgás folytán a henger tengelyére erő nem hat. Vizsgálnunk kell a haladó mozgást, ill. ennek gyorsulását.

Jelölje m a henger tömegét, r a sugarát, v a haladó mozgás sebességét, ha a henger a lejtőn l hosszúságú utat tett meg, ω a forgó mozgás szögsebességét az l hosszúságú út végén és K a henger tehetetlenségi nyomatékát tengelyére nézve.

A henger mozgási energiája két részből áll: a haladó mozgás energiája, $\frac{1}{2}mv^2$ és a forgó mozgás energiája, $\frac{1}{2}K\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2 . \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4}mv^2$.

Ezen energiák összegét az $mg\sin\alpha$ erő munkája létesíti, melyet az l úton át végzett. Tehát

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = mgl\sin\alpha$$

$$\frac{3}{4}v^2 = gl\sin\alpha, \quad v^2 = \frac{4}{3}gl\sin\alpha.$$

Látjuk tehát, hogy v^2 értéke az egyenletesen változó mozgás törvénye szerint változik[1] ha ezen mozgás gyorsulása γ, akkor

$$v^2 = \frac{4}{3}gl\sin\alpha = 2\gamma l \qquad \text{és innen} \qquad \gamma = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Ennek megfelelőleg az erő: $\frac{2}{3}Q_2\sin\alpha$.

Ezen erőnek a függőleges irányba eső összetevője lefelé mozgat és így nem gyakorol nyomást a nehézségi erő irányában; ennek nagysága: $\frac{2}{3}Q_2\sin^2\alpha$.

Most tehát a rendszer súlya:

$$Q = Q_1 + Q_2 - \frac{2}{3}Q_2\sin^2\alpha.$$

---

[1]A másik összetevő vízszintes irányban mozgatja a lejtőre helyezett testet.
[2]$\alpha = 0$ esetében $Q = Q_1 + Q_2$; ha $\alpha = 90^\circ$, $Q = Q_1$.
[3]Hasonló feladatok: II. évf. 55. és 62., IV. évf. 148., VIII. évf. 355., IX. évf. 402.
[1]v^2 arányos a megtett úttal. ($v_0 = 0$)

Ha $\alpha = 30°$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ és így

$$Q = Q_1 + Q_2 - \frac{1}{6}Q_2 = Q_1 + \frac{5}{6}Q_2.$$

$$\text{Ha}\ \ Q_1 = Q_2 = 1\ \text{kg}, \qquad Q = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}\text{kg}.$$

Kallós István (Vörösmarty Mihály g. VIII. o. Bp. VIII.)

II.

A Nap közepének színképében egy bizonyos vonal hullámhossza 5900 Å *egység. Ez a vonal* 0,04 Å *egységnyi eltolódást mutatott, amikor a színképet a Nap egyenlítőjében a Nap szélétől jövő fény adta. Számítsuk ki ezekből az adatokból, hogy mekkora a Nap egyenlítője egy pontjának kerületi sebessége?*

Megoldás. Ha a fény terjedési sebessége c és a fényforrás, mely n rezgésszámnak megfelelő színű sugarat bocsát ki, v sebességgel közeledik a megfigyelő felé, akkor a megfigyelő olyan színű sugarat lát, melynek rezgésszáma

(1) $$n_1 = n\frac{c}{c-v}\ldots$$

A Nap széle a közepéhez képest, a tengelye körül való forgása miatt, közeledhetik felénk, ill. távolodhatik tőlünk. Az előbbi képletben tehát v a kerületi (lineáris) sebességet jelenti, a Nap egyenlítőjén.

Ha n rezgésszám esetén a hullámhossz λ, míg n_1 rezgésszámhoz λ_1 hullámhossz tartozik, akkor

(2) $$n = \frac{c}{\lambda}, \quad n_1 = \frac{c}{\lambda_1} \ \text{ és így } \ \frac{n}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\ldots$$

1)-ből $\quad \frac{n}{n_1} = \frac{c-v}{c} = 1 - \frac{v}{c}; \quad$ 2) alapján $\quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = 1 - \frac{v}{c}$

és innen $\quad v = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda}c\ldots \qquad$ (3)

Ha a fényforrás közeledik, a színkép vonala az ibolya felé tolódik, rezgésszáma növekszik, tehát $\lambda_1 < \lambda$.

A megadott értékekkel

$$v - \frac{0{,}04}{5900}\cdot 3\cdot 10^5\ \text{kmsec}^{-1} = \frac{12000}{5900}\text{kmsec}^{-1} \sim 2{,}034\ \text{kmsec}^{-1}.$$

Ha a fényforrás távolodik, akkor a színkép vonalai a vörös felé tolódnak el, rezgésszámuk kisebb, hullámhosszuk nagyobb lesz ($\lambda_1 > \lambda$) és

$$n_1 = n\frac{c}{c+v}, \quad \frac{n}{n_1} = 1 + \frac{v}{c}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = 1 + \frac{v}{c}, \quad v = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda}c.$$

Látjuk tehát, hogy ugyanazon értéket kapjuk v-re, mint az előbb.

Margulit György (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.).

Jegyzet. 1^0. Néhány megoldás Doppler elvét arra az esetre alkalmazta, amidőn a megfigyelő közeledik a fényforráshoz, ill, távolodik tőle. A *numerikus* eredmény bizonyos pontosságig itt is ugyanaz.

2^0. 1 Ångström = 0,1 $\mu\mu = 10^{-7}$ mm. (L. pl. X. évf. 451. fizikai feladatában). Fölösleges a fény terjedési sebességét Å egységekre változtatni, mert a $\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda}$ viszonyban számlálót és nevezőt ugyanazon mértékkel fejeztük ki, tehát e viszony puszta szám.