A jobb oldali tört tizedestört alakja tiszta szakaszos: 222,222… A bal oldal viszont $\sqrt{7\cdot 84^2}=\sqrt{49\,392}=222{,}243\ldots$, a közelítő egyenlőség (1)-ben 1 tizedes jegyig, más szóval a negyedik értékes jegyig áll fenn.

A jobb oldal másképpen 2000/9, így

$$\sqrt{7}\approx\frac{2000}{9\cdot 84}=\frac{500}{189}. \tag{2}$$

A lánctört-kifejtés az ajánlott példák mintájára:

$$\begin{aligned}
&2<\sqrt{7}<3 \text{ miatt } \sqrt{7}=2+\frac{1}{x}, \text{ ahol } x=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3},\\
&1<x<2 \text{ miatt } x=1+\frac{1}{y}, \text{ ahol } y=\frac{1}{x-1}=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2},\\
&1<y<2 \text{ miatt } y=1+\frac{1}{z}, \text{ ahol } z=\frac{1}{y-1}=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{3},\\
&1<z<2 \text{ miatt } z=1+\frac{1}{u}, \text{ ahol } u=\frac{1}{z-1}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}+2,
\end{aligned}$$

$4<u<5$ és az első sor miatt $u=4+x$.

Ennélfogva a kifejtés első négy jegye (a 2 egész után) 1, 1, 1, 4, majd ezek szakaszosan ismétlődnek:

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Első három közelítő törtje:

$$2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1},\qquad 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{5}{2},\qquad 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{8}{3};$$

hasonlóan a negyedik, a jegyeket az első 4-es jegyig figyelembe véve 37/14. Ez az előző két közelítő tört számlálójával és nevezőjével, valamint az újonnan figyelembe vett 4-es jeggyel így írható:

$$\frac{37}{14}=\frac{8\cdot 4+5}{3\cdot 4+2}.$$

Nem nehéz megmutatni teljes indukcióval[1], hogy ha egy lánctört $k-2$-edik és $k-1$-edik közelítő törtjének számlálója és nevezője rendre S_{k-2}, N_{k-2}, S_{k-1}, N_{k-1}, és következő, k-adik jegye q_k, ezekből a k-adik közelítő tört (ill. a számlálója és nevezője) a számpéldából sejthetően

$$\frac{S_k}{N_k}=\frac{S_{k-1}\cdot q_k+S_{k-2}}{N_{k-1}\cdot q_k+N_{k-2}}. \tag{3}$$

Ennek alapján a következő négy közelítő tört (az 1, 1, 1, 4 jegyekkel) gyorsabban kiszámítható:

$$\frac{37\cdot 1+8}{14\cdot 1+3}=\frac{45}{17},\qquad \frac{45+37}{17+14}=\frac{82}{31},\qquad \frac{82+45}{31+17}=\frac{127}{48},$$
$$\frac{127\cdot 4+82}{48\cdot 4+31}=\frac{590}{223}.$$

A továbbiak számlálója is, nevezője is nagyobb, így (2) jobb oldala nem közelítő törtje a lánctört-kifejezésnek. Ez az állítás a gyök, valamint a közelítő törtek és (2) jobb oldalának tizedestört alakjából is látható:

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}&=2{,}645\,75\ldots, & 82/31&=2{,}645\,16\ldots\\
500/189&=2{,}645\,50\ldots, & 127/48&=2{,}645\,83\ldots\\
& & 590/223&=2{,}645\,73\ldots
\end{aligned}$$

[1] Ajánljuk az olvasóknak a bizonyítás végrehajtását. Megindulásul az indukciós feltevésben írjanak q_{k-1} helyére $q_{k-1}+1/q_k-t$.

(2) jobb oldala jobban eltér $\sqrt{7}$-től, mint a kisebb számlálóval és nevezővel bíró 127/38; a 82/31-nél viszont már jobban közelít.

Szentgáli Ádám (Budapest, Ady E. Ált. Isk. és Gimn. III. o. t.)
Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A lánctört-kifejtésnek $q_k > 1$ esetén lehet képezni ún. mellék-törtjeit, ha q_k helyére rendre az $1,\ 2,\ \ldots,\ q_k - 1$ egész számokat írjuk be. Ezek (3) szerint S_k-nál kisebb számlálójú és N_k-nál kisebb nevezőjű közelítő törtet adnak, de – az alábbi példák szerint – kevésbé jól közelítik a gyököt, ugyanis a második 4-es jegy helyett rendre 1-et, 2-t, 3-at téve

$$\frac{127\cdot 1+82}{48\cdot 1+31}=\frac{209}{79}=2{,}645\,56\ldots$$
$$\frac{127\cdot 2+82}{48\cdot 2+31}=\frac{336}{127}=2{,}645\,66\ldots$$
$$\frac{127\cdot 3+82}{48\cdot 3+31}=\frac{463}{175}=2{,}645\,71\ldots$$

(2) jobb oldala ezek közé sem tartozik – és már az első is jobban közelít nála.